

4.6. Intégration sur des parallélogrammes et des triangles.

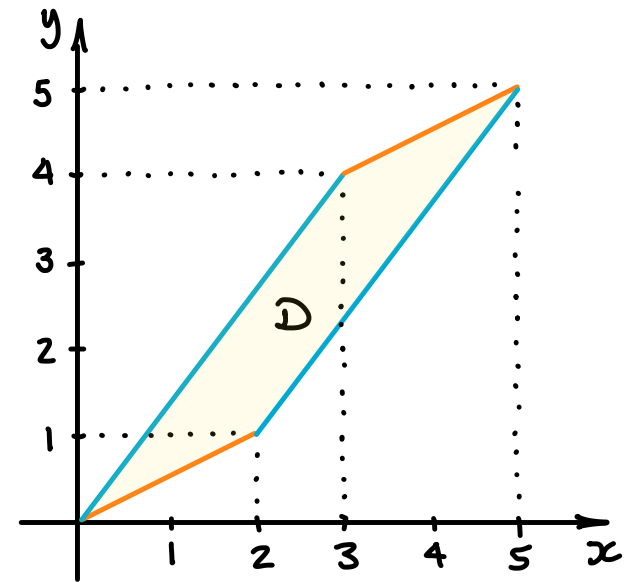
Si le domaine d'intégration est un parallélogramme ou un triangle il peut s'avérer utile de faire un changement de variables.

Exemple 1.

Soit D le parallélogramme engendré par les vecteurs

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer $I = \iint_D (x + 3y) dx dy$



Première possibilité: calcul direct

x varie entre 0 et 5.

Pour $x \in [0, 2]$ fixé, y varie entre

$$g_1(x) = \frac{1}{2}x \text{ et } g_2(x) = \frac{4}{3}x$$

Pour $x \in [2, 3]$ fixé, y varie entre

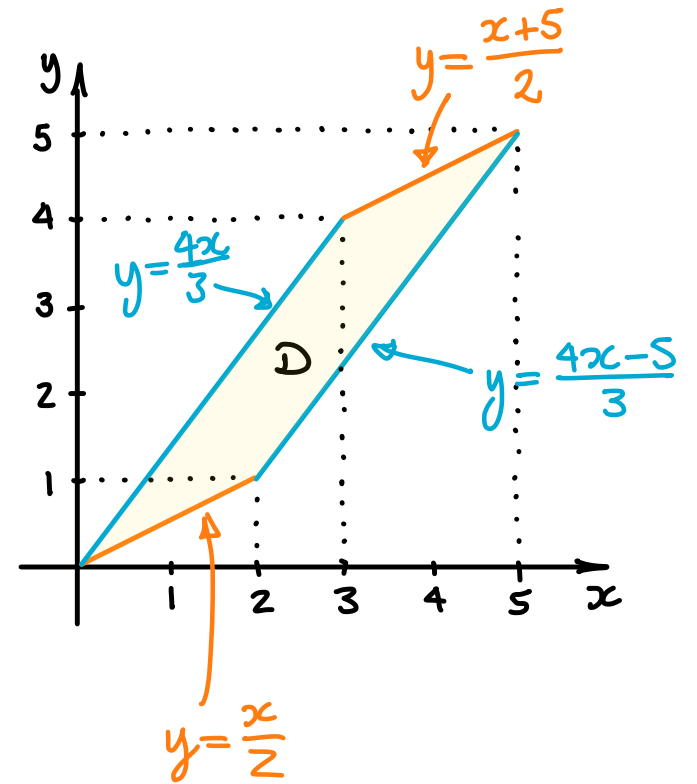
$$g_1(x) = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3} \text{ et } g_2(x) = \frac{4}{3}x$$

Pour $x \in [3, 5]$ fixé, y varie entre

$$g_1(x) = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3} \text{ et } g_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

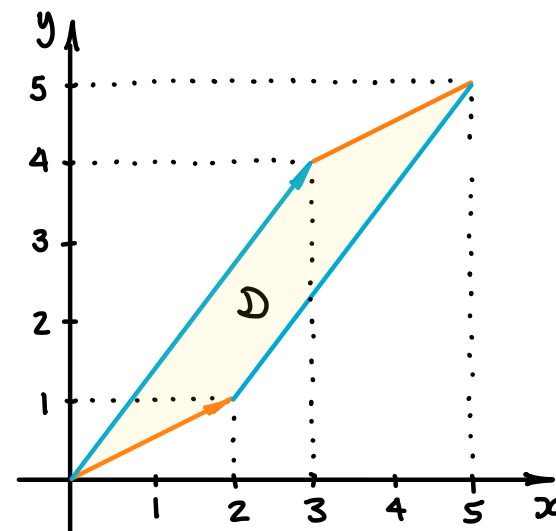
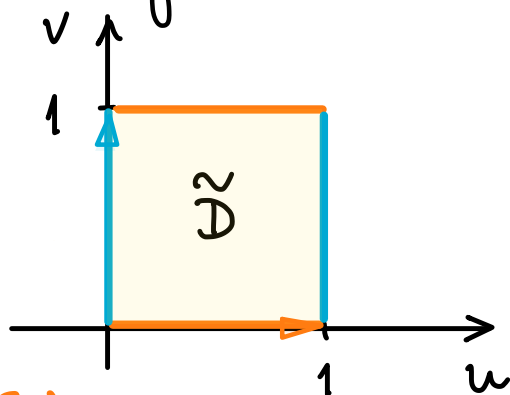
d'où:

$$\begin{aligned} I = & \int_0^2 \left(\int_{x/2}^{4x/3} (x+3y) dy \right) dx + \int_2^3 \left(\int_{(4x-5)/3}^{4x/3} (x+3y) dy \right) dx \\ & + \int_3^5 \left(\int_{(4x-5)/3}^{(x+5)/2} (x+3y) dy \right) dx = \dots \end{aligned}$$



Deuxième possibilité: changement de variables

Soit $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire qui envoie le carré $\tilde{D} = [0,1] \times [0,1]$ vers le parallélogramme D :



$$\left. \begin{aligned} G\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ G\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_G = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{matrice canoniquement} \\ \text{associée à } G \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = G\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = A_G \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u + 3v \\ u + 4v \end{pmatrix}$$

Changement de variables:

$$\begin{cases} x(u,v) = 2u + 3v \\ y(u,v) = u + 4v \end{cases}$$

Matrice jacobienne :

$$J_G(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = A_G$$

Jacobien : $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det(J_G(u,v)) = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 5$

$$\boxed{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 5}$$

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{\tilde{D}} \tilde{f}(u,v) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv$$

$$\boxed{\iint_D f(x,y) dx dy = 5 \iint_{\tilde{D}} \tilde{f}(u,v) du dv}$$

où $\tilde{D}$ est le carré $[0,1] \times [0,1]$.

$$\text{Ici } f(x,y) = x + 3y$$

$$\text{d'où } \tilde{f}(u,v) = (2u+3v) + 3(u+4v) = 5u + 15v$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow I &= 5 \iint_{\tilde{D}} (5u + 15v) du dv \\ &= 25 \iint_{\tilde{D}} u du dv + 75 \iint_{\tilde{D}} v du dv \\ &= 25 \underbrace{\left(\int_0^1 u du \right)}_{= \frac{1}{2} u^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}} \underbrace{\left(\int_0^1 dv \right)}_{= v \Big|_0^1 = 1} + 75 \underbrace{\left(\int_0^1 du \right)}_{= 1} \underbrace{\left(\int_0^1 v dv \right)}_{= \frac{1}{2} v^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\iint_D (x + 3y) dx dy = 50}$$

Exemple 2.

Soit D le triangle de sommets

$(0,0)$, $(2,1)$ et $(3,4)$

Calculer $\iint_D (x+3y) dx dy$

Première possibilité: calcul direct

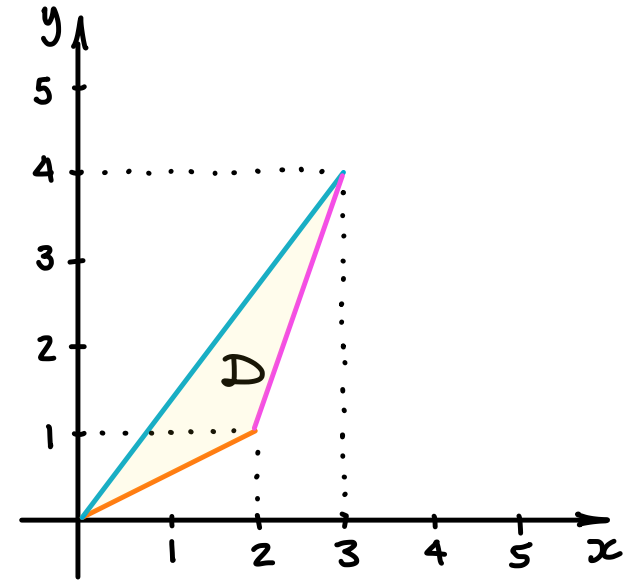
x varie entre 0 et 3

Pour $x \in [0,2]$ fixé, y varie entre $g_1(x) = \frac{1}{2}x$ et $g_2(x) = \frac{4}{3}x$

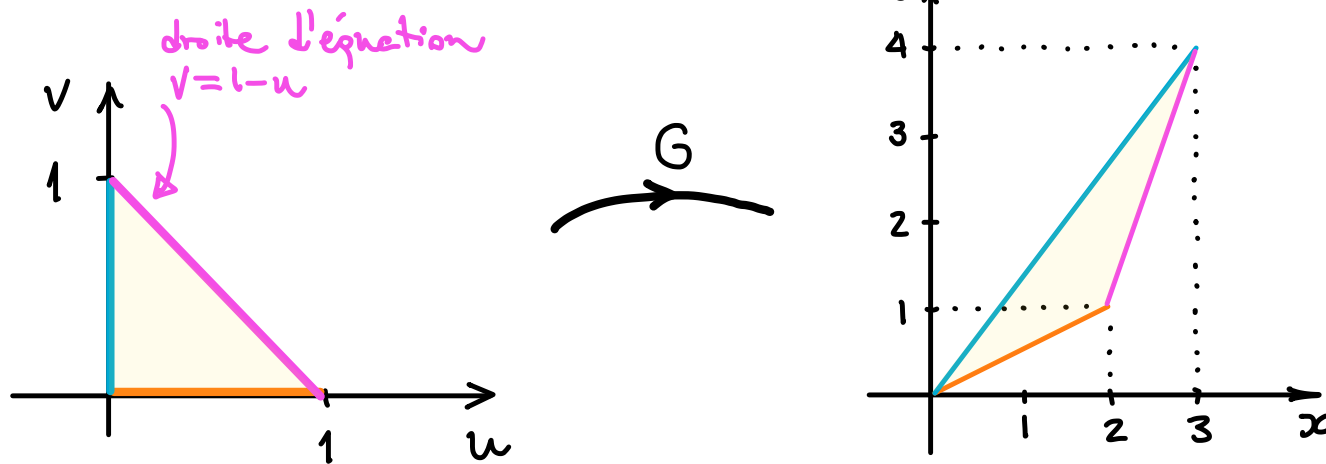
Pour $x \in [2,3]$ fixé, y varie entre $g_1(x) = 3x - 5$ et $g_2(x) = \frac{4}{3}x$

$$\text{d'où: } \iint_D (x+3y) dx dy = \int_0^2 \left(\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{4x}{3}} (x+3y) dy \right) dx + \int_2^3 \left(\int_{3x-5}^{\frac{4x}{3}} (x+3y) dy \right) dx$$

= ...



Deuxième possibilité: le changement de variables de l'exemple 1:



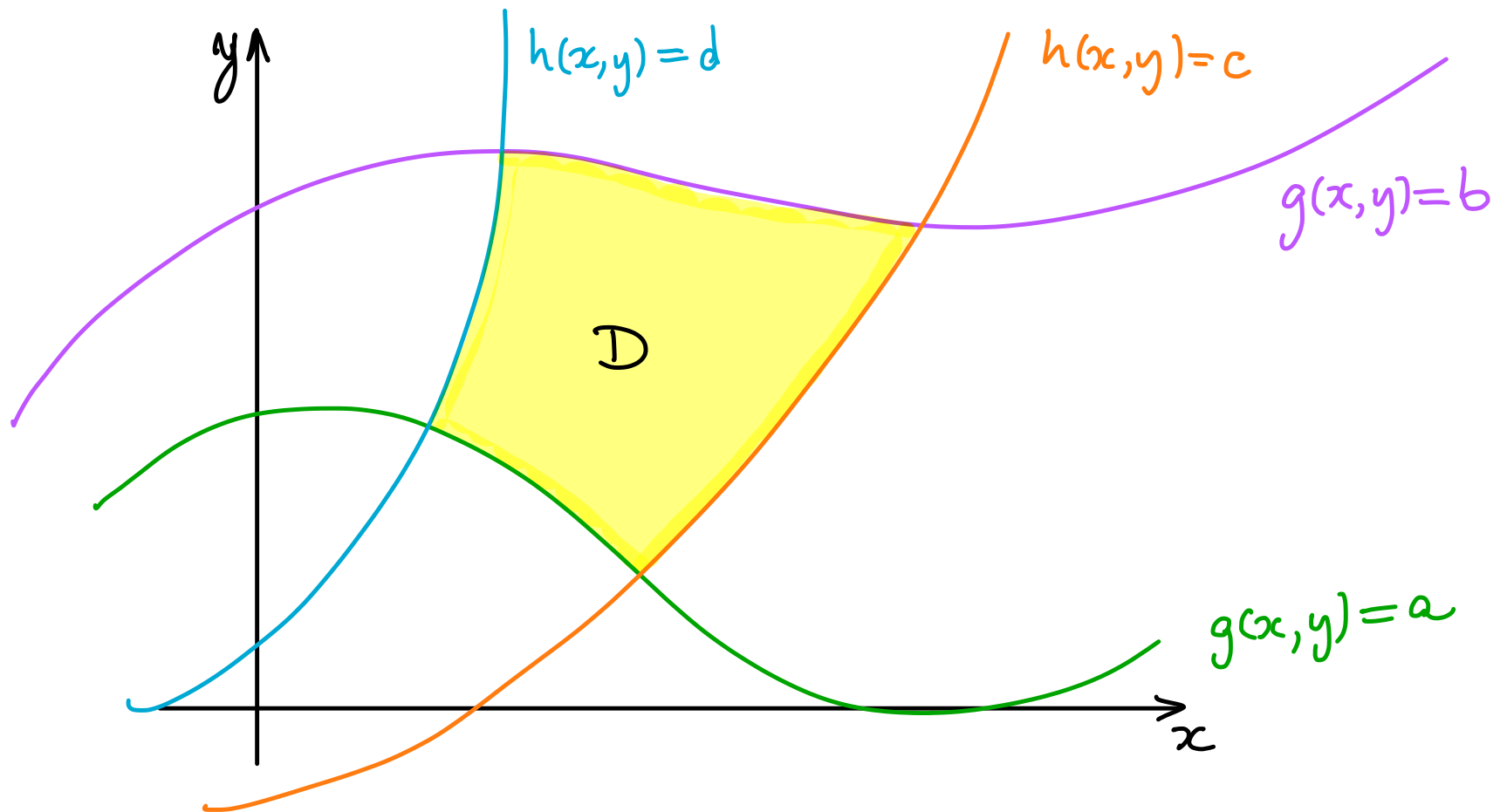
Ici u varie entre 0 et 1.

Pour $u \in [0,1]$ fixé, v varie entre $g_1(u)=0$ et $g_2(u)=1-u$

$$\begin{aligned} \iint_D (x+3y) dx dy &= 5 \iint_{\tilde{D}} (5u+15v) du dv \\ &= 25 \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} (u+3v) dv \right) du \\ &= 25 \int_0^1 \left[uv + \frac{3}{2} v^2 \right]_{v=0}^{v=1-u} du \\ &= 25 \int_0^1 \left(u(1-u) + \frac{3}{2} (1-u)^2 \right) du = \dots = \frac{50}{3} \end{aligned}$$

4.7. Coordonnées curvilignes.

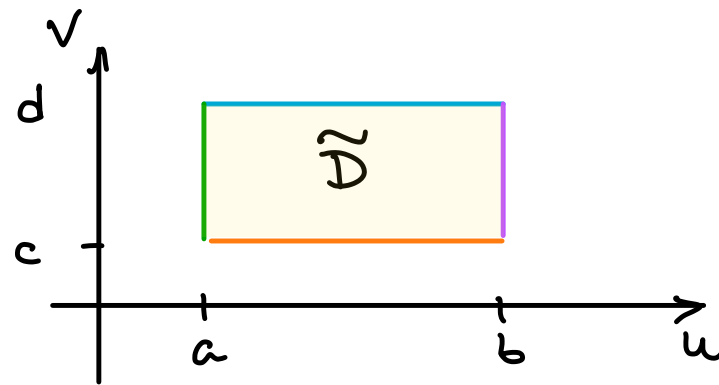
Considérons maintenant un domaine du plan limité par les courbes de niveau de deux fonctions g et h :



Si l'on veut calculer $\iint_D f(x,y) dx dy$ il peut s'avérer utile d'utiliser le changement de variables suivant:

$$\begin{cases} u = g(x,y) \\ v = h(x,y) \end{cases}$$

Comme u varie entre a et b et v varie entre c et d , le domaine d'intégration est le rectangle $\tilde{D} = [a, b] \times [c, d]$:



On a donc
$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{\tilde{D}} \tilde{f}(u,v) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv$$

où $G: \tilde{D} \rightarrow D$
 $(u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v))$

Le changement de variables inverse est donné par :

$$G^{-1}: D \rightarrow \tilde{D}$$

$$(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y)) = (g(x,y), h(x,y))$$

Rappel. Si A et B sont des matrices carrées de même taille, alors $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

En particulier, si $B = A^{-1}$, on a $AB = I$ et $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Conséquence:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

et

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}$$

Exemples.

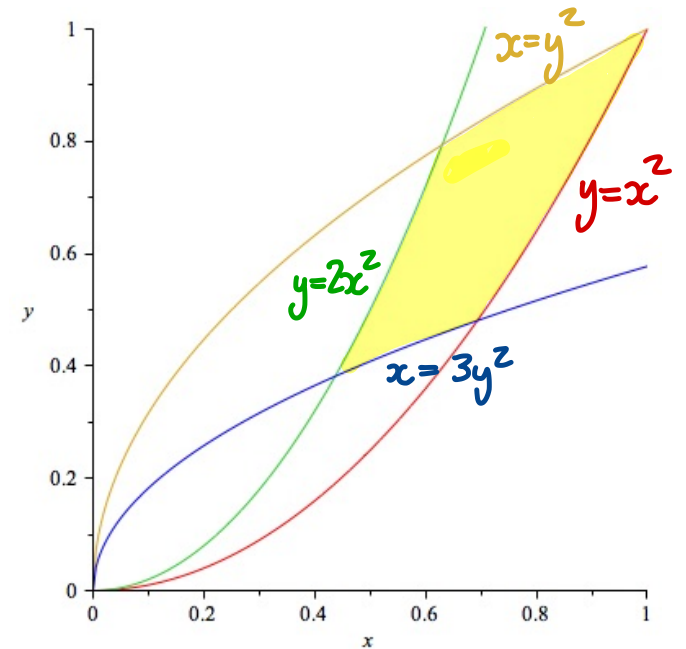
1. Calculer l'aire du domaine D limité par

$$\text{les courbes } y = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{y} = 1$$

$$y = 2x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{y} = \frac{1}{2}$$

$$x = y^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{x} = 1$$

$$x = 3y^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{x} = \frac{1}{3}$$



le changement de variables: $\begin{cases} u = \frac{x^2}{y} \\ v = \frac{y^2}{x} \end{cases}$ avec $x, y > 0$

est tel que $\tilde{D}$ est un rectangle: $\tilde{D} = [\frac{1}{2}, 1] \times [\frac{1}{3}, 1]$

car u varie entre $\frac{1}{2}$ et 1 et v varie entre $\frac{1}{3}$ et 1

matrice jacobienne: $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{pmatrix}$

jacobien: $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{2x}{y} \cdot \frac{2y}{x} - \frac{x^2}{y^2} \cdot \frac{y^2}{x^2} = 4 - 1 = 3$

$$\Rightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{3}$$

L'aire du domaine $\mathcal{D}$ vaut donc:

$$\begin{aligned} A(\mathcal{D}) &= \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy = \iint_{\tilde{\mathcal{D}}} 1 \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \, du \, dv = \iint_{\tilde{\mathcal{D}}} 1 \cdot \frac{1}{3} \, du \, dv \\ &= \frac{1}{3} \iint_{\tilde{\mathcal{D}}} 1 \, du \, dv = \frac{1}{3} A(\tilde{\mathcal{D}}) = \frac{1}{3} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\right)}_{\text{base}} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{3}\right)}_{\text{hauteur}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A(\mathcal{D}) = \frac{1}{9}$$

Remarque.

Il est aussi possible de calculer le jacobien $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ directement, mais il faut commencer par exprimer x et y comme des fonctions de u et v :

$$\begin{cases} u = \frac{x^2}{y} \\ v = \frac{y^2}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} uv^2 = \frac{x^4}{y^2} \cdot \frac{y^2}{x^4} = x^3 \\ u^2v = \frac{x^2}{y^2} \cdot \frac{y^4}{x^2} = y^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u^{2/3} v^{1/3} \\ y = u^{1/3} v^{2/3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} u^{-1/3} v^{1/3} & \frac{1}{3} u^{2/3} v^{-2/3} \\ \frac{1}{3} u^{-2/3} v^{1/3} & \frac{2}{3} u^{1/3} v^{-1/3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

On obtient le même résultat mais avec plus d'effort.

2. Calculer l'intégrale

$$I = \iint_D (x^2 - y^2) e^{xy} dx dy$$

où D est le domaine limité
par les courbes:

$$xy=1$$

$$y=x$$

$$xy=4$$

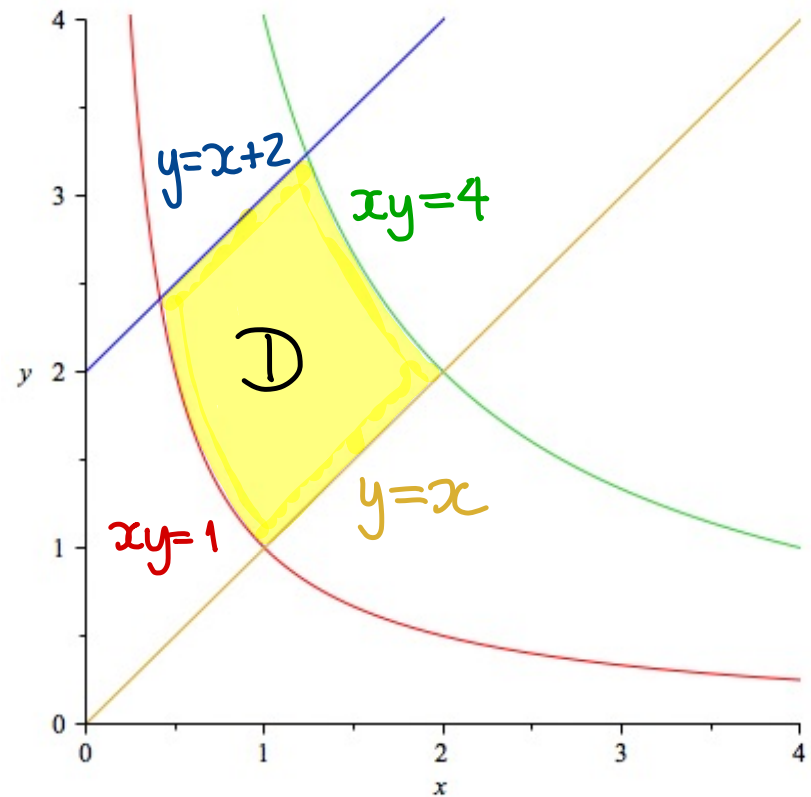
$$y=x+2$$

le changement de variables:

$$\begin{cases} u = xy \\ v = y - x \end{cases}$$

est tel que $\tilde{D}$ est un rectangle: $\tilde{D} = [1, 4] \times [0, 2]$

car u varie entre 1 et 4 et v varie entre 0 et 2



matrice jacobienne:
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

jacobien: $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = x+y > 0$ sur $\mathcal{D}$.

Ainsi:
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} \Rightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{x(u,v) + y(u,v)}$$

Comme $f(x,y) = (x^2 - y^2) e^{xy} = (x+y)(x-y) e^{xy}$

la fonction à intégrer dans les nouvelles variables $u=xy$

et $v=y-x$ est:

$$\tilde{f}(u,v) = (x(u,v) + y(u,v))(-v) e^{uv}$$

Nous avons donc:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x^2 - y^2) e^{xy} dx dy = \iint_{\tilde{D}} \tilde{f}(u, v) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \\ &= \iint_{\tilde{D}} (x(u, v) + y(u, v)) (-v) e^{uv} \frac{1}{x(u, v) + y(u, v)} du dv \\ &= \iint_{\tilde{D}} -v e^u du dv = \left(\int_1^4 e^u du \right) \left(\int_0^2 -v dv \right) \\ &= [e^u]_1^4 \left[-\frac{v^2}{2} \right]_0^2 = (e^4 - e)(-2 + 0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = 2e(1 - e^3)}$$