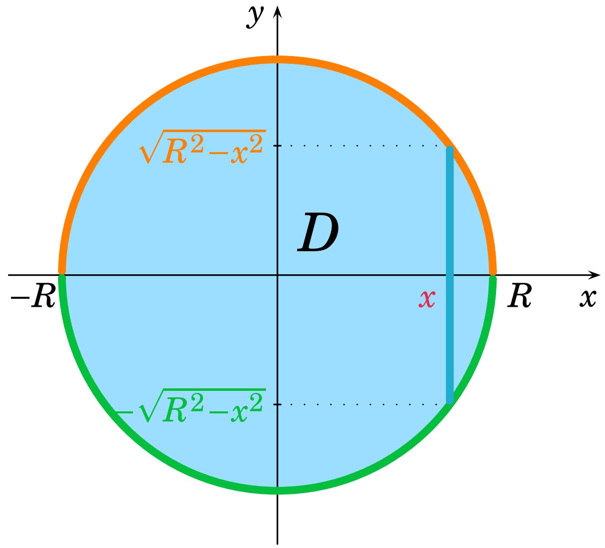
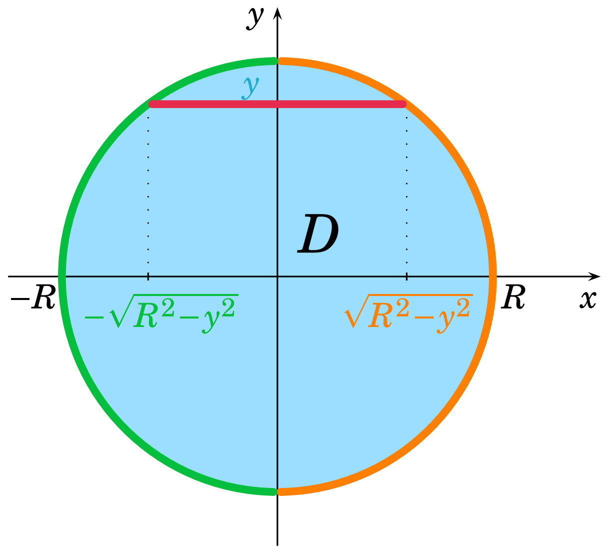
5. Soit D le disque de rayon R centré à l'origine.

Ecrire $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ comme une intégrale itérée.

Nous avons deux possibilités :

- La variable x varie entre $-R$ et R.
  Pour chaque $x \in [-R,R]$ fixé, y varie entre
  $$g_1(x) = -\sqrt{R^2 - x^2} \qquad \text{et} \qquad g_2(x) = \sqrt{R^2 - x^2}.$$
  Ainsi,
  $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)\,dy \right) dx \qquad \textbf{(1)}$$
- La variable y varie entre $-R$ et R.
  Pour chaque $x \in [-R,R]$ fixé, x varie entre
  $$h_1(x) = -\sqrt{R^2 - y^2} \qquad \text{et} \qquad h_2(x) = \sqrt{R^2 - y^2}.$$
  Ainsi,
  $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y)\,dx \right) dy \qquad \textbf{(2)}$$





6. Soit D le domaine de l'exemple 5 et $f(x,y)=\sqrt{R^2-y^2}$.

Calculer $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

Comme f ne dépend pas de x, il convient d'intégrer d'abord par rapport à x :

$$\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \sqrt{R^2-y^2}\,dx=\sqrt{R^2-y^2}\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} 1\,dx=\sqrt{R^2-y^2}\Big[x\Big]_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}}=2(R^2-y^2)$$

D'où

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_{-R}^{R} 2(R^2-y^2)\,dy=2\left[R^2y-\frac{y^3}{3}\right]_{-R}^{R}=\frac{4}{3}R^3+\frac{4}{3}R^3=\frac{8}{3}R^3.$$

Remarque. Si la fonction à intégrer est quelconque, l'intégration sur le domaine D de l'exemple 5 peut s'avérer compliquée, d'où l'intérêt à considérer une autre méthode.

4.4. Changement de variables dans les intégrales doubles

Rappel. Nous avons vu qu'il est parfois utile de changer de variable pour calculer une intégrale. Pour ce faire, nous avons utilisé la formule de changement de variables

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f\big(g(u)\big)g'(u)du\,.$$

où g est une fonction bijective de classe C^1.

Si $g:[c,d]\to[a,b]$ est une fonction monotone croissante (avec $g'(u)\geqslant 0$), nous avons $g^{-1}(a)=c$ et $g^{-1}(b)=d$ et la formule ci-dessus devient

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f\big(g(u)\big)\,g'(u)du\,.$$

Si $g:[c,d]\to[a,b]$ est une fonction monotone décroissante (avec $g'(u)\leqslant 0$), nous avons $g^{-1}(a)=d$ et $g^{-1}(b)=c$ et la formule de changement de variables devient

$$\int_a^b f(x)dx = \int_d^c f\big(g(u)\big)\,g'(u)du = -\int_c^d f\big(g(u)\big)\,g'(u)du\,.$$

Nous pouvons résumer les deux formules précédentes sous la forme :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f\big(g(u)\big)\big|g'(u)\big|\,du\,,$$

où la valeur absolue tient compte du signe de l'intégrale de droite dans le cas décroissant.

Si nous notons $I = [a,b]$ et $\widetilde{I} = [c,d]$ et nous posons

$$\widetilde{f}(u) = f\big(g(u)\big)$$

alors la formule précédente s'écrit :

$$\int_I f(x)\,dx = \int_{\widetilde{I}} \widetilde{f}(u)\big|g'(u)\big|\,du\,, \qquad (\star)$$

Question. Quel est l'analogue de la formule $(\star)$ dans le cas des intégrales doubles ?

Dans le cas des fonctions de deux variables, un *changement de variables* est une fonction bijective de classe C^1 :

$$\begin{aligned} G : D(G) &\longrightarrow \mathrm{Im}(G) \\ (u,v) &\longmapsto \big(x(u,v), y(u,v)\big) \end{aligned}$$

Nous lui associons la matrice

$$J_G(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

appelée *matrice jacobienne*.

Le déterminant de cette matrice, noté $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\big(J_G(u,v)\big) = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

est appelé *jacobien* associé au changement de variables.

Nous pouvons à présent donner l'analogue de

$$\int_I f(x)\,dx = \int_{\widetilde{I}} \widetilde{f}(u)\left|g'(u)\right|du\,, \tag{$\star$}$$

Théorème. Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue de deux variables,

$$\begin{aligned} G : D(G) &\longrightarrow \mathrm{Im}(G) \\ (u,v) &\longmapsto \big(x(u,v), y(u,v)\big) \end{aligned}$$

un changement de variables et $\widetilde{D} \subset \mathbb{R}^2$ tel que $G^{-1}(D) = \widetilde{D}$. Soit $\widetilde{f} : \widetilde{D} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\widetilde{f}(u,v) = f\big(x(u,v), y(u,v)\big).$$

Nous avons

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\widetilde{D}} \widetilde{f}(u,v)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv\,.$$

où $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ est la valeur absolue du jacobien associé au changement de variables G.

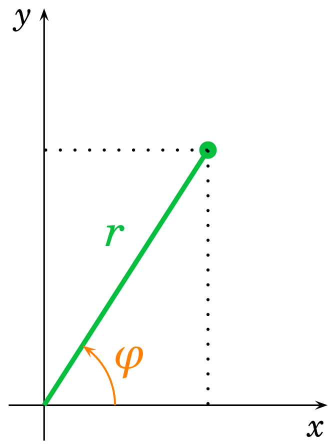
Méthode de calcul

Soit D un domaine du plan et $f : D \to \mathbb{R}^2$ une fonction de deux variables.

Pour calculer l'intégrale double $\quad I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

1. Trouver des variables u et v pour lesquelles le domaine d'intégration et/ou la fonction à intégrer deviennent plus simples.
2. Calculer le jacobien associé au changement de variables $G : (u,v) \mapsto (x,y)$.
3. Déterminer les bornes des variables u et v :
$$a \leqslant u \leqslant b \quad \text{et} \quad g_1(u) \leqslant v \leqslant g_2(u) \qquad \text{ou} \qquad c \leqslant v \leqslant d \quad \text{et} \quad h_1(v) \leqslant u \leqslant h_2(v).$$
4. Déterminer $\widetilde{f}(u,v) = f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$.
5. Calculer
$$I = \iint_{\widetilde{D}} \widetilde{f}(u,v) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv = \int_a^b \left(\int_{g_1(u)}^{g_2(u)} \widetilde{f}(u,v) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dv\right) du$$
ou
$$I = \iint_{\widetilde{D}} \widetilde{f}(u,v) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv = \int_c^d \left(\int_{h_1(v)}^{h_2(v)} \widetilde{f}(u,v) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\right) dv.$$

4.5. Coordonnées polaires (r,φ)



$$\begin{cases} x = r\cos(\varphi), \\ y = r\sin(\varphi), \end{cases} \qquad \text{avec } r \geqslant 0 \text{ et } 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \text{ (ou } -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi\text{).}$$

La matrice jacobienne associée à ce changement de variables est

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

et le jacobien,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r\cos^2(\varphi) + r\sin^2(\varphi) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r\,.$$

Le théorème nous donne alors

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\widetilde{D}} \widetilde{f}(r,\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

où $\widetilde{f}(r,\varphi) = f\big(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\big)$.

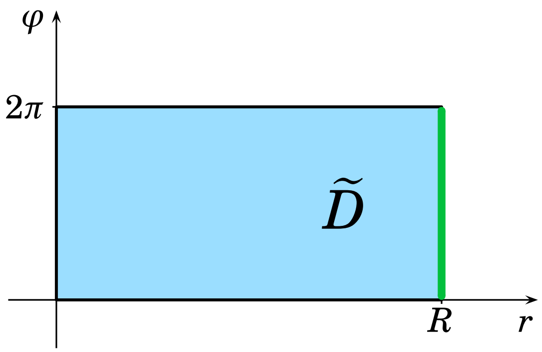
Quelques domaines en coordonnées polaires

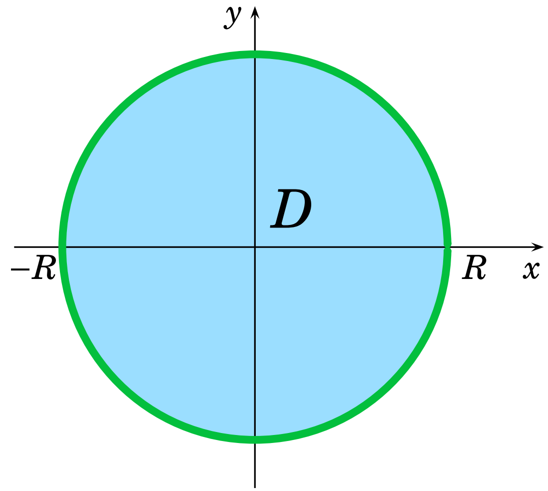
1. Disque de rayon R centré à l'origine

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$$

Le domaine D exprimé en coordonnées polaires est donc un rectangle :

$$\widetilde{D} = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant r \leqslant R\,,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$$



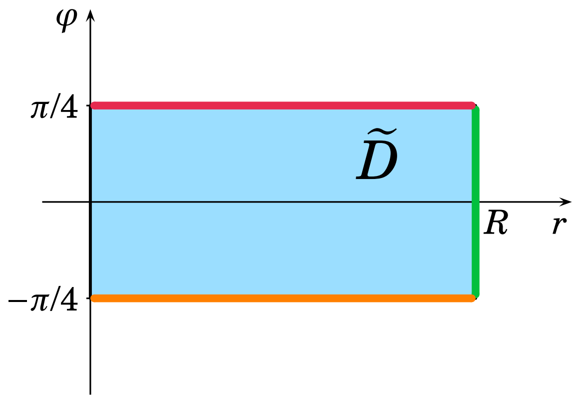


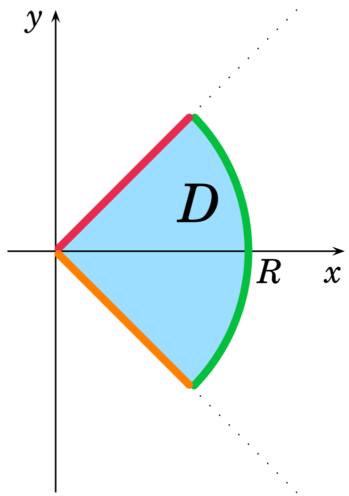
2. Secteur circulaire de rayon R

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant R^2,\ |y| \leqslant x\right\}$$

Le domaine D exprimé en coordonnées polaires est donc un rectangle :

$$\widetilde{D} = \left\{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant r \leqslant R\,,\ -\tfrac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \tfrac{\pi}{4}\right\}$$



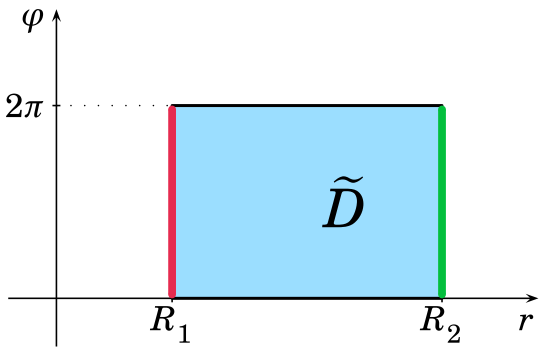


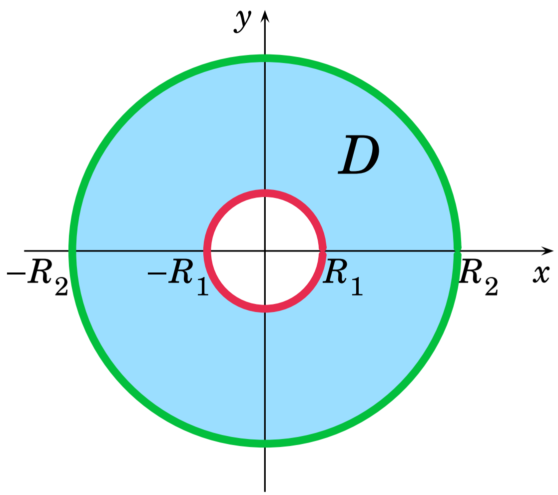
3. Couronne centrée à l'origine

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : R_1^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant R_2^2\}$$

Le domaine D exprimé en coordonnées polaires est donc un rectangle :

$$\widetilde{D} = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : R_1 \leqslant r \leqslant R_2,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$$



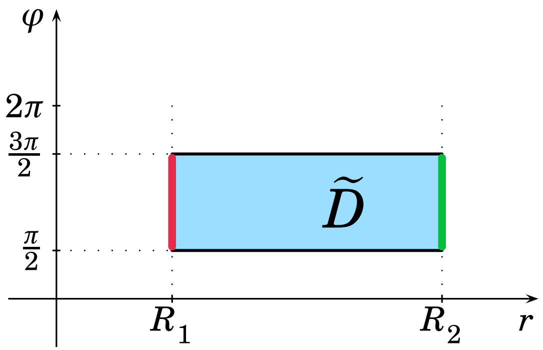


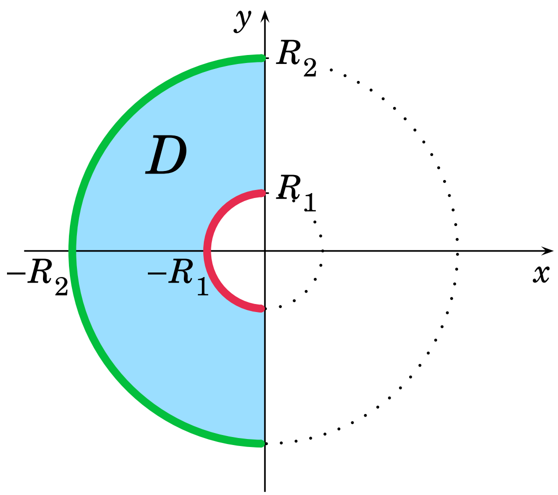
4. Demi-couronne centrée à l'origine

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : R_1^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant R_2^2,\ x \leqslant 0\right\}$$

Le domaine D exprimé en coordonnées polaires est donc un rectangle :

$$\widetilde{D} = \left\{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : R_1 \leqslant r \leqslant R_2,\ \frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{2}\right\}$$





5. Triangle D de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(1,1)$

Dans ce cas, l'angle φ varie entre 0 et $\frac{\pi}{4}$.

Pour chaque, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ fixé, r varie entre

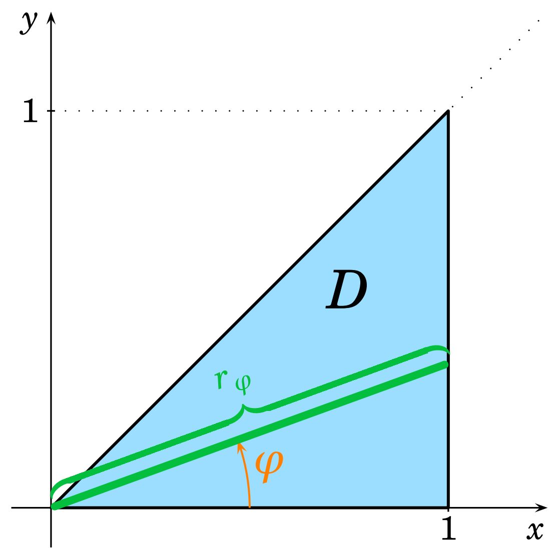
$$r = 0 \quad \text{et} \quad r = r_{\varphi}$$

où r_{φ} est tel que

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{r_{\varphi}}$$

Par conséquent, le domaine D exprimé en coordonnées polaires s'écrit

$$\widetilde{D} = \left\{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4},\ 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{\cos(\varphi)}\right\}$$



Exemples

1. Calculer l'aire du disque D de rayon R centré à l'origine.

   Nous avons
$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leqslant R^2\right\}\quad\text{et}\quad \widetilde{D}=\left\{(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2 : 0\leqslant r\leqslant R\,,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\right\}$$
   d'où
$$\begin{aligned}\mathcal{A}(D)&=\iint_D 1\,dx\,dy=\iint_{\widetilde{D}} 1\cdot r\,dr\,d\varphi=\left(\int_0^R r\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi}1\,d\varphi\right)\\&=\left(\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R\right)\left(\left[\varphi\right]_0^{2\pi}\right)=\left(\frac{R^2}{2}-0\right)(2\pi-0)=\pi R^2\end{aligned}$$

2. Calculer $I=\displaystyle\iint_D e^{3(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ où D est le disque de rayon R centré à l'origine.

   Comme $x^2+y^2=r^2$ nous avons
$$\begin{aligned}I&=\iint_D e^{3(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\iint_{\widetilde{D}} e^{3r^2}r\,dr\,d\varphi=\left(\int_0^R e^{3r^2}r\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi}1\,d\varphi\right)\\&=\left(\left[\frac{1}{6}e^{3r^2}\right]_0^R\right)\left(\left[\varphi\right]_0^{2\pi}\right)=\frac{1}{6}\left(e^{3R^2}-e^0\right)(2\pi-0)=\frac{\pi}{3}\left(e^{3R^2}-1\right)\end{aligned}$$

3. Calculer l'intégrale double

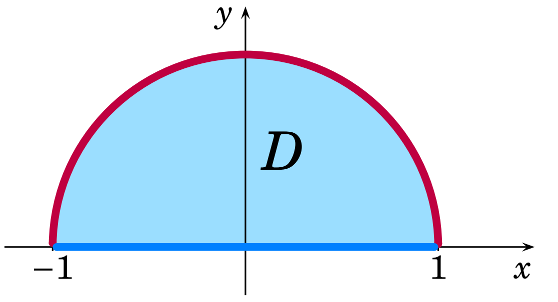
$$I=\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}(x^2+y^2)^{3/2}dy\right)dx$$

à l'aide des coordonnées polaires.

La variable x varie entre -1 et 1.

Pour $x\in[-1,1]$ fixé, y varie entre

$$g_1(x)=0 \qquad \text{et} \qquad g_2(x)=\sqrt{1-x^2}$$



Le domaine d'intégration est donc le demi-disque

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leqslant 1,\ y\geqslant 0\}$$

Le domaine D exprimé en coordonnées polaires est le rectangle :

$$\widetilde{D}=\{(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2 : 0\leqslant r\leqslant 1,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi\}$$

d'où

$$I=\iint_D(x^2+y^2)^{3/2}\,dx\,dy=\iint_{\widetilde{D}}r^3\cdot r\,dr\,d\varphi=\left(\int_0^1 r^4dr\right)\left(\int_0^{\pi}1\,d\varphi\right)$$

$$=\left(\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1\right)\left(\left[\varphi\right]_0^{\pi}\right)=\left(\frac{1}{5}-0\right)(\pi-0)=\frac{\pi}{5}$$

4. Calculer le volume de la région limitée par le cylindre de rayon 1 et d'axe $0z$, le plan $0xy$ et le plan d'équation $z = x + y + 2$.

Le volume cherché est $\mathcal{V} = \iint_D (x+y+2)\,dx\,dy$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

Le calcul nous donne

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \iint_D x\,dx\,dy + \iint_D y\,dx\,dy + \iint_D 2\,dx\,dy \\ &= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x\,dx\right)dy + \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy\right)dx + 2\mathcal{A}(D) = 0 + 0 + 2\pi\cdot 1^2 = 2\pi,\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que l'intégrale d'une fonction impaire sur un domaine symétrique est nulle. Le calcul peut aussi être fait à l'aide des coordonnées polaires :

$$\widetilde{D} = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant r \leqslant 1,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \iint_D (x+y+2)\,dx\,dy = \iint_{\widetilde{D}} \big(r\cos(\varphi) + r\sin(\varphi) + 2\big)r\,dr\,d\varphi \\ &= \left(\int_0^1 r^2 dr\right)\left(\int_0^{2\pi} \cos(\varphi)\,d\varphi\right) + \left(\int_0^1 r^2 dr\right)\left(\int_0^{2\pi} \sin(\varphi)\,d\varphi\right) + \left(\int_0^1 2r\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) \\ &= \left(\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1\right)\left(\Big[\sin(\varphi)\Big]_0^{2\pi}\right) + \left(\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1\right)\left(\Big[-\cos(\varphi)\Big]_0^{2\pi}\right) + \left(\Big[r^2\Big]_0^1\right)\left(\Big[\varphi\Big]_0^{2\pi}\right) = \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 0 + 1\cdot 2\pi \\ &= 2\pi\end{aligned}$$

5. Soit D le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(1,1)$.

Calculer $I = \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$.

Nous avons

$$I = \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \iint_{\widetilde{D}} \frac{1}{r}\cdot r\,dr\,d\varphi = \iint_{\widetilde{D}} 1\,dr\,d\varphi$$

où

$$\widetilde{D} = \left\{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4},\ 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{\cos(\varphi)}\right\}$$

Par conséquent,

$$I = \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{1/\cos(\varphi)} 1\,dr\right) d\varphi = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos(\varphi)}\,d\varphi = \left[\ln\left|\frac{1+\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}\right|\right]_0^{\pi/4}$$

$$= \ln\left|\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right| - \ln\left|\frac{1+0}{1}\right| = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$