Remarque. Si la fonction à intégrer peut s'écrire comme un produit de la forme

$$f(x,y) = g(x)h(y),$$

alors l'intégrale double de f sur le rectangle $D = [a,b] \times [c,d]$ est égale au produit de deux intégrales simples :

$$\iint_D g(x)h(y)\,dx\,dy = \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)\left(\int_c^d h(y)\,dy\right).$$

En effet,

$$\begin{aligned}\iint_D g(x)h(y)\,dx\,dy &= \int_c^d \left(\int_a^b g(x)\underbrace{h(y)}_{\text{constante}}\,dx\right)dy \\ &= \int_c^d h(y)\underbrace{\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)}_{\text{constante}}dy \\ &= \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)\int_c^d h(y)\,dy.\end{aligned}$$

Attention : Cette formule est valable seulement si D est un rectangle.

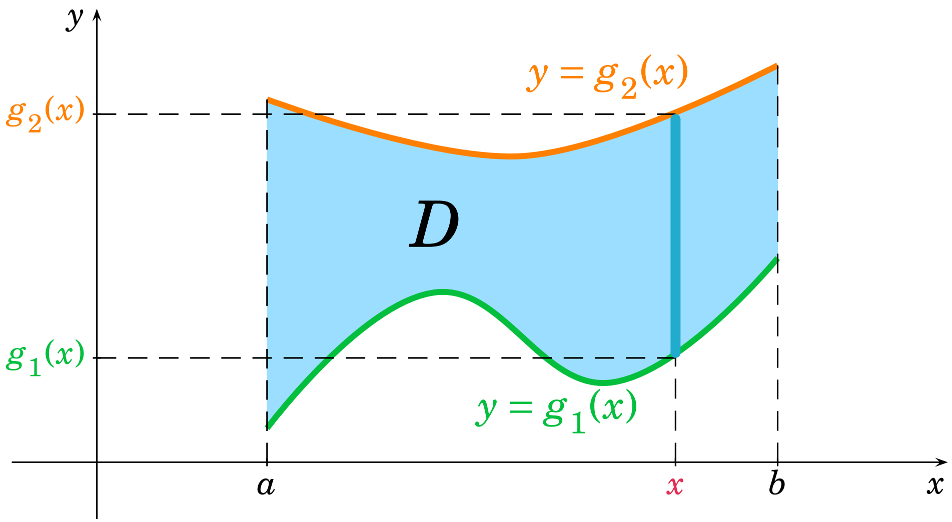
Nous pouvons faire le calcul suivant pour la fonction de l'exemple 2 :

$$\begin{aligned}
\iint_D (x^2y^3-2)\,dx\,dy &= \left(\int_0^3 x^2\,dx\right)\left(\int_0^2 y^3\,dy\right) - 2\iint_D dx\,dy \\
&= \left(\int_0^3 x^2\,dx\right)\left(\int_0^2 y^3\,dy\right) - 2\mathcal{A}(D) \\
&= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 \left[\frac{y^4}{4}\right]_0^2 - 2\cdot(3-0)(2-0) \\
&= (9-0)(4-0) - 12 = 24\,.
\end{aligned}$$

4.3. Intégrales doubles sur des domaines non rectangulaires

Considérons maintenant le domaine délimité par les droites $x = a$, $x = b$ et les courbes

$$y = g_1(x) \quad \text{et} \quad y = g_2(x) \qquad \text{avec } g_1(x) \leqslant g_2(x) \text{ pour tout } x \in [a, b].$$



Pour chaque $x \in [a, b]$ fixé, y varie entre $g_1(x)$ et $g_2(x)$. Nous pouvons écrire

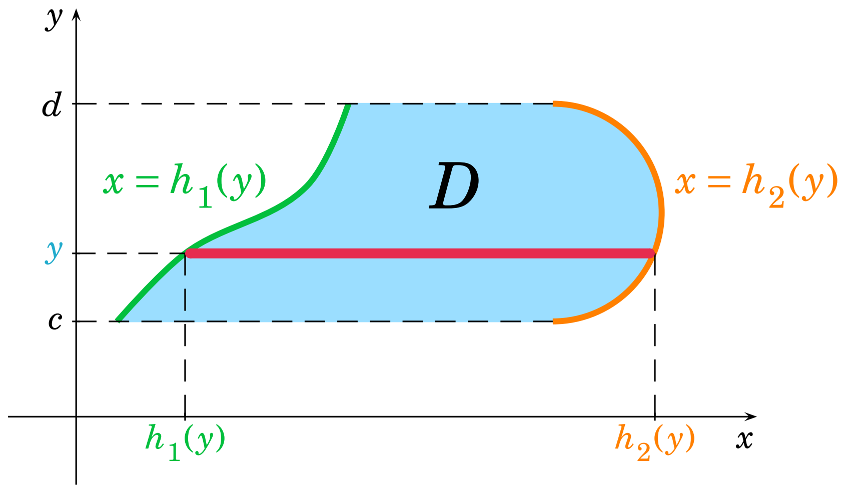
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b\,,\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\right\}$$

et l'intégrale double se calcule à l'aide de l'intégrale itérée

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \underbrace{\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\right)}_{\text{ne dépend plus de } y} dx\,. \tag{i}$$

Considérons à présent le domaine délimité par les droites $y = c$, $y = d$ et les courbes

$$x = h_1(y) \quad \text{et} \quad x = h_2(y) \qquad \text{avec } h_1(y) \leqslant h_2(y) \text{ pour } y \in [c, d].$$



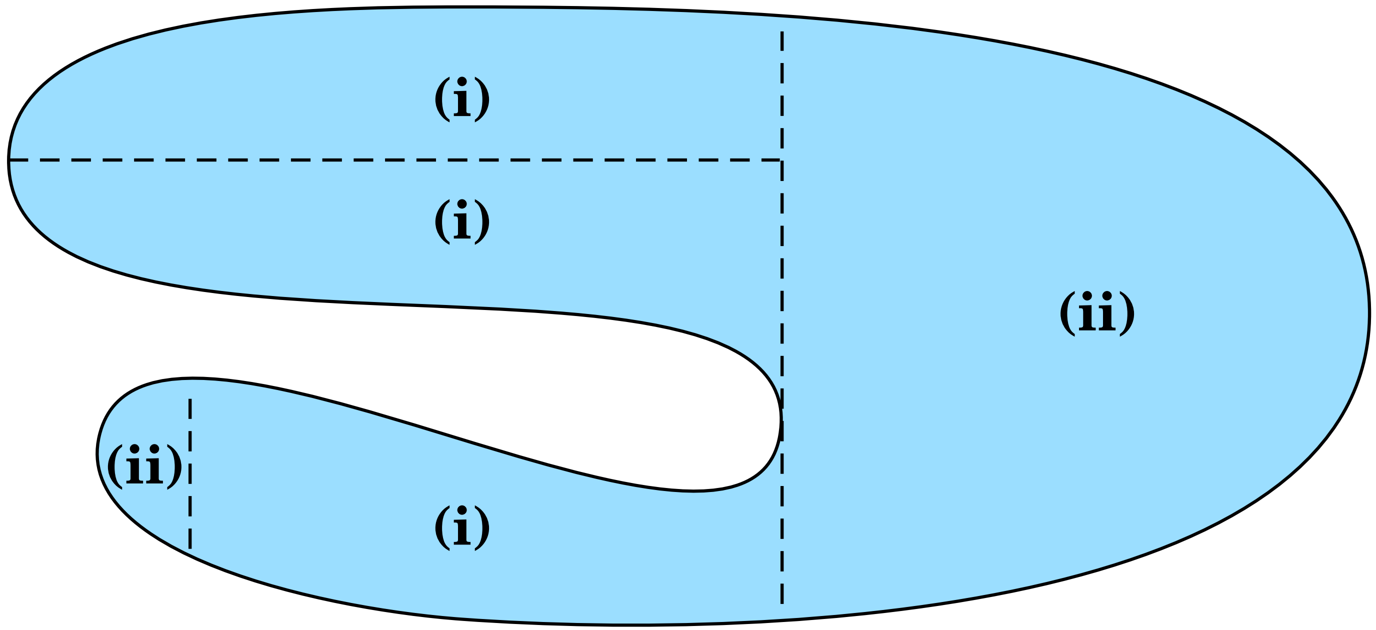
Pour chaque $y \in [c, d]$ fixé, x varie entre $h_1(y)$ et $h_2(y)$. Nous pouvons écrire

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leqslant y \leqslant d\,,\ h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y)\right\}$$

et l'intégrale double se calcule à l'aide de l'intégrale itérée

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \underbrace{\left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\right)}_{\text{ne dépend plus de } x} dy\,. \tag{ii}$$

Remarque. Dans le cas général, nous décomposons le domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ en morceaux où nous pouvons appliquer soit la formule (i) soit la formule (ii). Le choix entre ces deux formules est indiqué par la forme du domaine ou par la fonction à intégrer.



Méthode de calcul

Soit f une fonction de deux variables et D un domaine du plan.

Pour calculer l'intégrale double

$$I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy,$$

- fixer les bornes d'une des variables :

$$a \leqslant x \leqslant b \qquad \text{ou} \qquad c \leqslant y \leqslant d.$$

- Pour chaque valeur *fixée* de cette variable, déterminer les bornes d'intégration de la deuxième variable :

$$g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x) \qquad \text{ou} \qquad h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y).$$

- Intégrer d'abord par rapport à la deuxième variable et ensuite par rapport à la première variable :

$$I = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \qquad \text{ou} \qquad I = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Remarque. L'ordre d'intégration est arbitraire, déterminé en partie par la forme du domaine et/ou de la fonction à intégrer.

Exemples

1. Soit D le triangle dont les sommets sont $(0,0)$, $(2,0)$ et $(2,1)$.

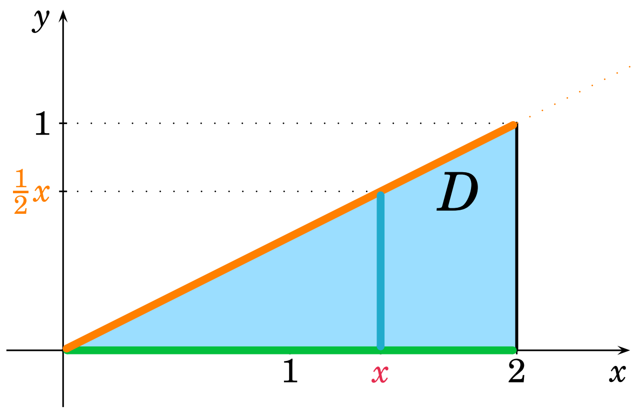
   Ecrire $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ comme une intégrale itérée.

   La droite qui passe par $(0,0)$ et $(2,1)$ a comme équation $y=\frac{1}{2}x$ ou encore $x=2y$.

   Nous avons deux possibilités :

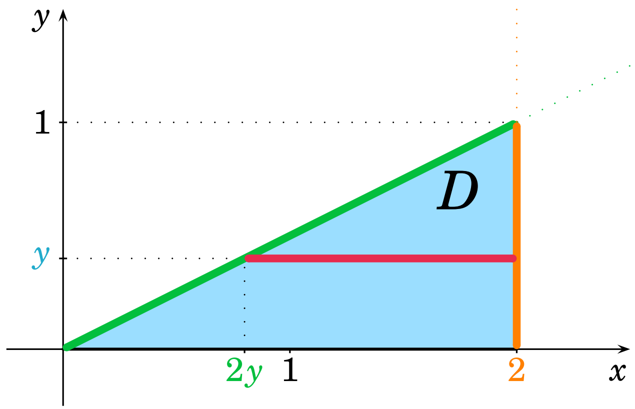
   - La variable x varie entre 0 et 2.

     Pour chaque $x\in[0,2]$ fixé, y varie entre
     $$g_1(x)=0 \qquad \text{et} \qquad g_2(x)=\frac{1}{2}x.$$
     Ainsi,
     $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^2\left(\int_0^{x/2} f(x,y)\,dy\right)dx$$



   - La variable y varie entre 0 et 1.

     Pour chaque $y\in[0,1]$ fixé, x varie entre
     $$h_1(y)=2y \qquad \text{et} \qquad h_2(y)=2.$$
     Ainsi,
     $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1\left(\int_{2y}^{2} f(x,y)\,dx\right)dy$$



2. Soit D le domaine de l'exemple 1 et $f(x,y) = x + xy^2$.

Calculer $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

Nous pouvons utiliser les deux formules trouvées dans l'exemple précédent :

$$\begin{aligned}
\iint_D (x+xy^2)\,dx\,dy &= \int_0^2 \left(\int_0^{x/2} (x+xy^2)\,dy \right) dx = \int_0^2 \left(\left[xy + x\frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=x/2} \right) dx \\
&= \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - 0 + 0 \right) dx = \left[\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \right]_0^2 = \frac{2^3}{6} + \frac{2^5}{120} \\
&= \frac{4}{3} + \frac{4}{15} = \frac{24}{15} = \frac{8}{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_D (x+xy^2)\,dx\,dy &= \int_0^1 \left(\int_{2y}^{2} x(1+y^2)\,dx \right) dy = \int_0^1 (1+y^2) \left(\int_{2y}^{2} x\,dx \right) dy \\
&= \int_0^1 (1+y^2) \left(\left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=2y}^{x=2} \right) dy = \int_0^1 (1+y^2) \left(\frac{2^2}{2} - \frac{4y^2}{2} \right) dy \\
&= 2\int_0^1 (1+y^2)(1-y^2)\,dy = 2\int_0^1 (1-y^4)\,dy \\
&= 2\left[1 - \frac{y^5}{5} \right]_0^1 = 2\left(1 - \frac{1}{5} \right) = \frac{8}{5}
\end{aligned}$$

3. Soit D le domaine de l'exemple 1 et $f(x,y) = e^{2y/x}$.

Calculer $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

Comme
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{2y/x}\right) = \frac{2}{x}\,e^{2y/x},$$
nous avons
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{2}\,e^{2y/x}\right) = e^{2y/x},$$
d'où
$$\begin{aligned}\iint_D e^{2y/x}\,dx\,dy &= \int_0^2 \left(\int_0^{x/2} e^{2y/x}\,dy\right)dx = \int_0^2 \left(\left[\frac{x}{2}\,e^{2y/x}\right]_{y=0}^{y=x/2}\right)dx\\ &= \int_0^2 \left(\frac{x}{2}\,e^1 - \frac{x}{2}\,e^0\right)dx = \frac{e-1}{2}\int_0^2 x\,dx = \frac{e-1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2\\ &= e-1\end{aligned}$$

Remarque. Comme
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{2y/x}\right) = -\frac{2y}{x^2}\,e^{2y/x},$$
il *n'est pas* possible d'exprimer la fonction f comme la dérivée partielle par rapport à x d'une fonction exprimée à l'aide de fonctions élémentaires.

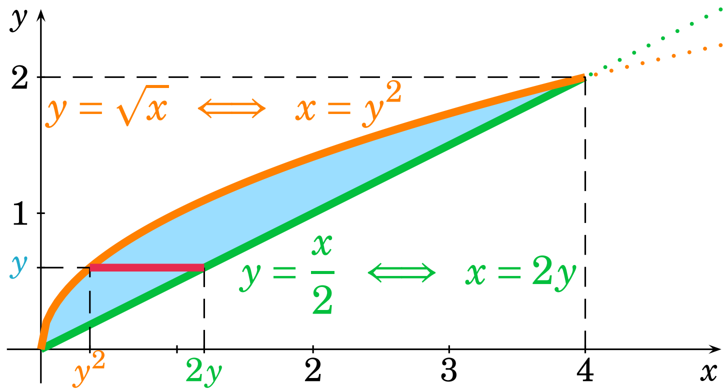
4. Inverser l'ordre d'intégration dans l'intégrale

$$I = \int_0^4 \left(\int_{x/2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\, dy \right) dx\,.$$

La variable x varie entre 0 et 4. Pour $x \in [0,4]$ fixé, y varie entre

$$g_1(x) = \frac{x}{2} \qquad \text{et} \qquad g_2(x) = \sqrt{x}\,.$$

Le domaine d'intégration est donc :



Par conséquent, la variable y varie entre 0 et 2. Pour $y \in [0,2]$ fixé, x varie entre

$$h_1(y) = y^2 \qquad \text{et} \qquad h_2(y) = 2y\,,$$

ce qui nous donne

$$I = \int_0^2 \left(\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\, dx \right) dy\,.$$