4. Intégrales multiples

4.1. Intégrales doubles

Rappel. Nous avons vu que si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est une fonction bornée, l'intégrale de Riemann

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

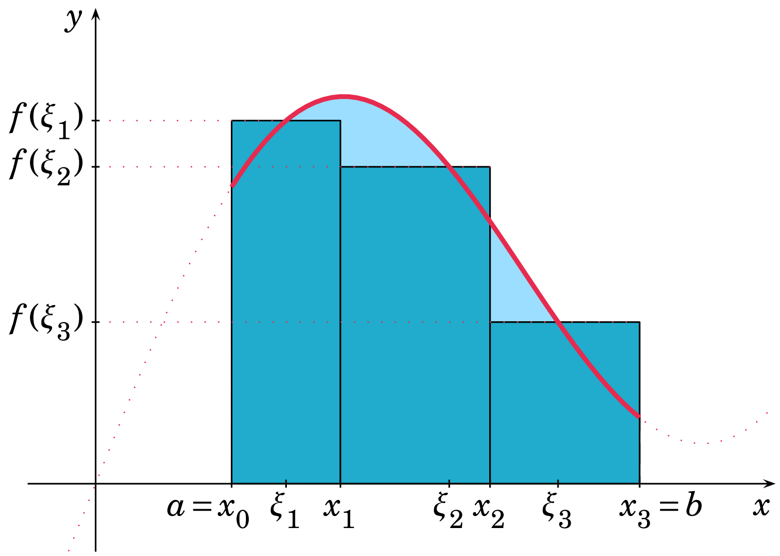
est la limite des sommes de Riemann

$$s_n=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}),$$

où $\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ est une partition arbitraire de l'intervalle $[a,b]$ avec

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$$

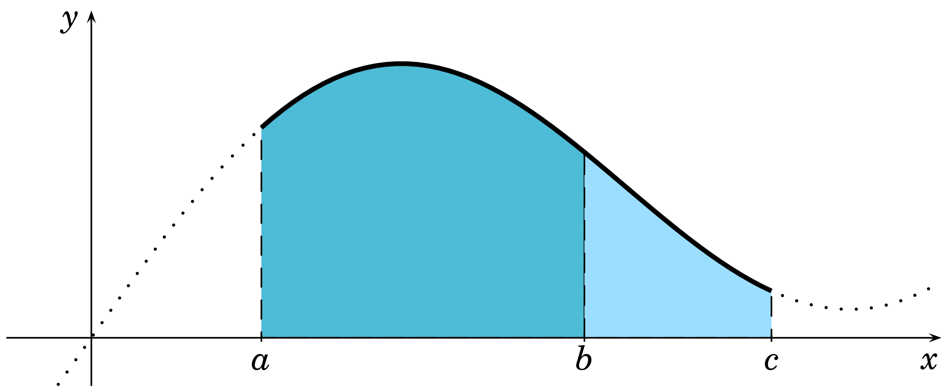
et $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ pour tout $k=1,2,\ldots,n$.



Propriétés

1. Si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions intégrables sur $[a, b]$, alors $f + g$ est intégrable et
$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx\,.$$
2. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable sur $[a, b]$ et $c \in \mathbb{R}$, alors cf est intégrable et
$$\int_a^b c\, f(x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx\,.$$
3. Soit $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a, c]$ et soit $b \in\,]a, c[$. Alors
$$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx\,.$$

   Cas $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a, c]$:



Théorème de la moyenne

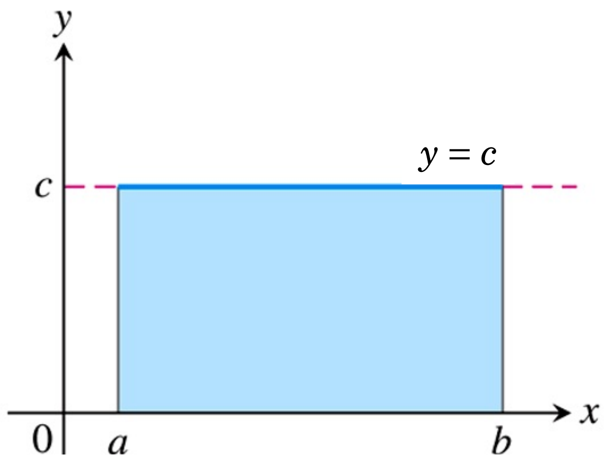
Théorème. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue.

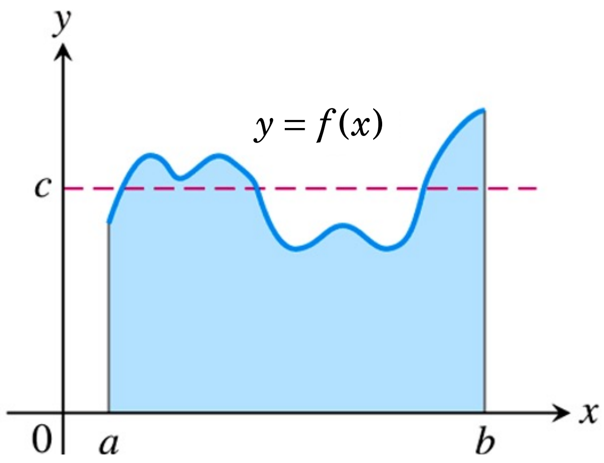
Alors il existe (au moins) un nombre $c\in[a,b]$ tel que

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

Interprétation géométrique

Si $f(x)\geqslant 0$ pour tout $x\in[a,b]$, le théorème de la moyenne nous dit qu'il existe (au moins) un nombre $c\in[a,b]$ tel que le rectangle de base $(b-a)$ et hauteur $f(c)$ possède la même aire que le domaine délimité par le graphe de la fonction continue f, l'axe $0x$ et les droites verticales $x=a$ et $x=b$.





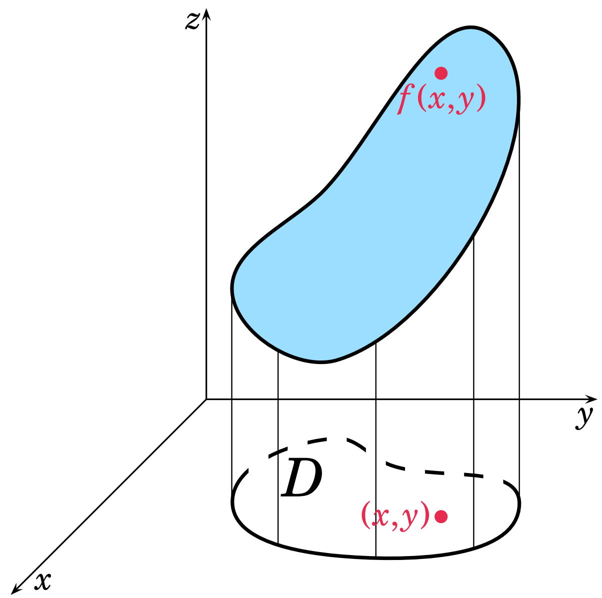
But : Définir l'intégrale d'une fonction de deux variables sur un domaine D du plan $\mathbb{R}^2$.

Nous allons procéder ici de manière analogue :

Soit f une fonction réelle de deux variables.

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine *borné* contenu dans $D(f)$.

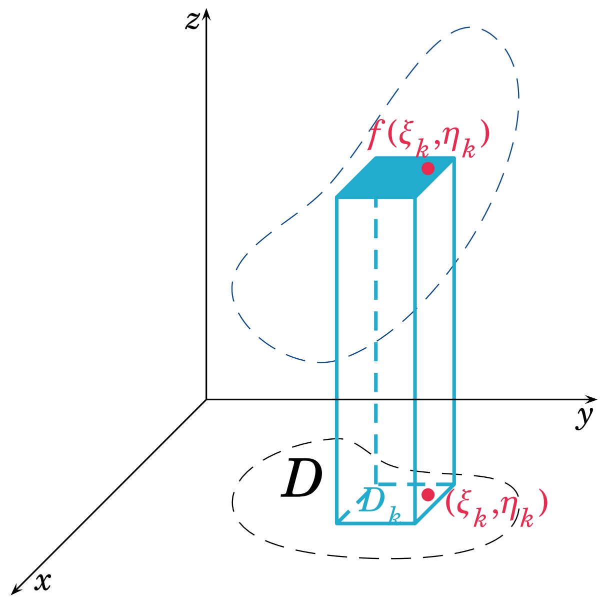
Lorsque la fonction f est continue et positive, nous pouvons nous représenter l'intégrale de f sur le domaine D comme le *volume* du corps délimité par le graphe de f, le plan $0xy$ et les droites verticales passant par le bord de D.



Partageons le domaine D arbitrairement en n morceaux $D_1, D_2, \ldots, D_n$ (par exemple des rectangles) d'aires $\mathcal{A}(D_1)$, $\mathcal{A}(D_2), \ldots, \mathcal{A}(D_n)$ et choisissons un point arbitraire (ξ_k, η_k) dans chaque morceau D_k.

Nous pouvons approximer le volume du corps délimité par le graphe de f, le plan $0xy$ et les droites verticales passant par le bord de D_k par le volume du parallélépipède de base $D_k \subset \mathbb{R}^2$ et de hauteur $f(\xi_k, \eta_k)$:

$$f(\xi_k, \eta_k)\mathcal{A}(D_k).$$

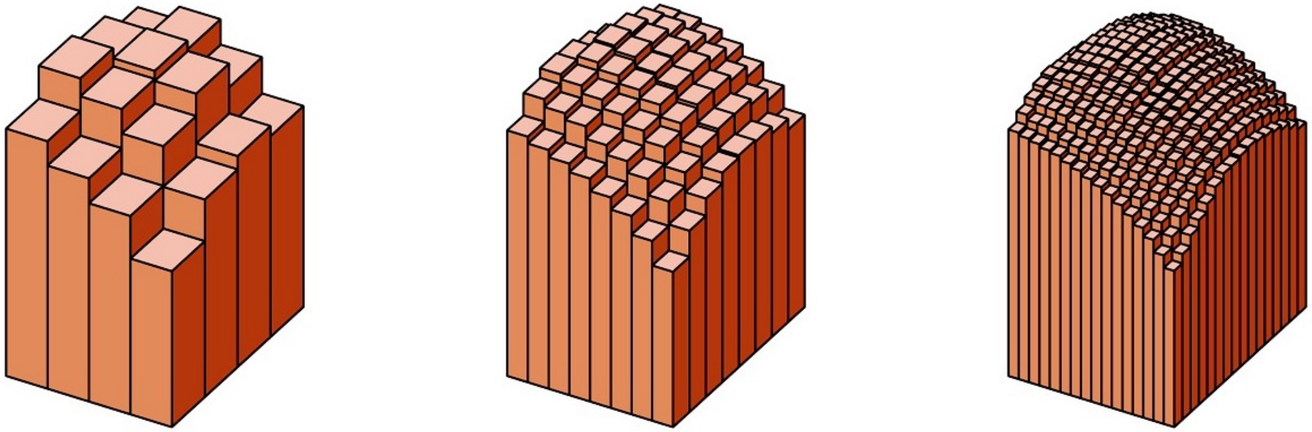


Définition. La fonction de deux variables f est *intégrable* (au sens de Riemann) sur D si pour toutes les partitions $\{D_1, \dots, D_n\}$ du domaine D telles que $\max\big(\mathcal{A}(D_k)\big) \longrightarrow 0$ et n'importe quel choix $(\xi_k, \eta_k) \in D_k$, la somme de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\mathcal{A}(D_k)$$

tend vers une même limite. Cette limite est appelée *intégrale de Riemann* de f sur D et notée

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy\,.$$



Théorème. (sans démonstration)

Si f est continue sur D alors f est intégrable sur D.

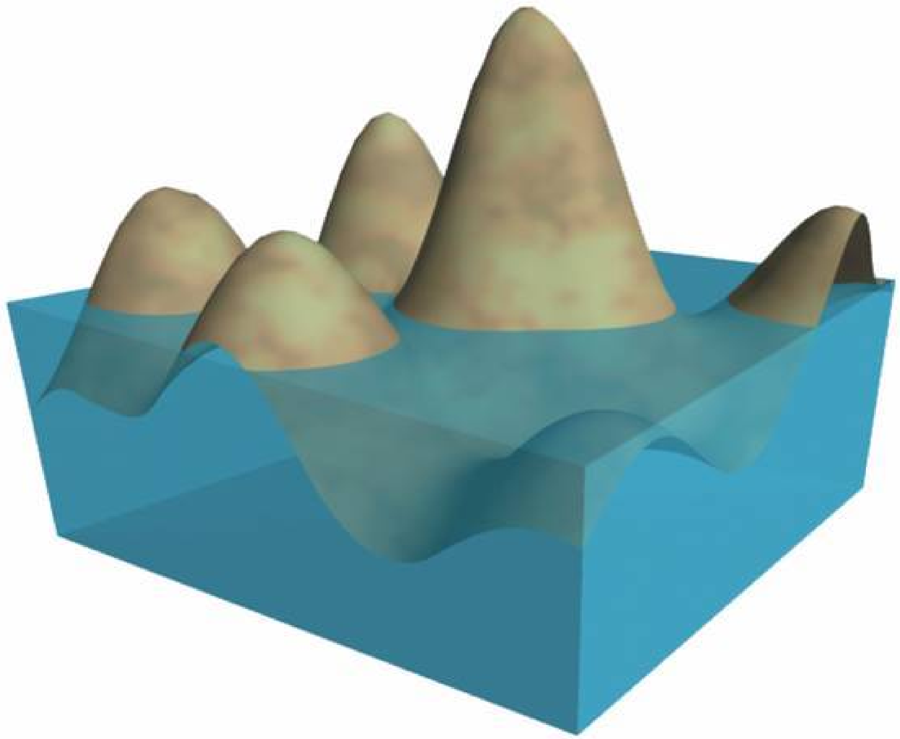
Propriétés

1. Si $f, g : D \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions intégrables sur D, alors $f+g$ est intégrable et
$$\iint_D \big(f(x,y)+g(x,y)\big)\,dx\,dy = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy + \iint_D g(x,y)\,dx\,dy.$$
2. Si $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable sur D et $c \in \mathbb{R}$, alors cf est intégrable et
$$\iint_D c\,f(x,y)\,dx\,dy = c \iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$$
3. Si $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable sur $D = D_1 \sqcup D_2$ (réunion disjointe), alors
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy.$$
4. L'aire du domaine D peut être calculée à l'aide de l'intégrale de la fonction constante $f(x,y) = 1$ pour tout $(x,y) \in D$:
$$\mathcal{A}(D) = \iint_D 1\,dx\,dy.$$
5. S'il existe une constante M telle que $|f(x,y)| \leqslant M$ pour tout $(x,y) \in D$ alors
$$\left|\iint_D f(x,y)\,dx\,dy\right| \leqslant M\,\mathcal{A}(D).$$

Théorème de la moyenne. (sans démonstration)

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine connexe. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors il existe un point $(\xi, \eta) \in D$ tel que

$$\iint_D f(x, y)\, dx dy = f(\xi, \eta) \mathcal{A}(D).$$

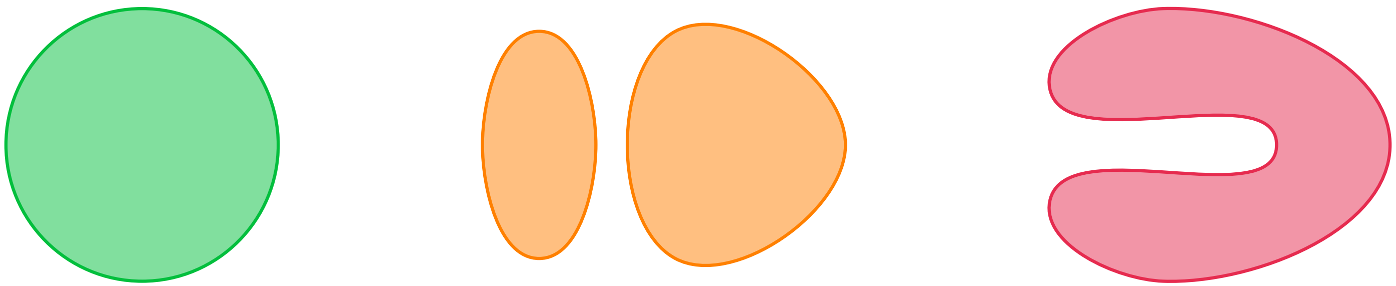


Calcul d'intégrales doubles

Nous avons défini l'intégrale double $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.

Question. Comment la calculer ?

Problème. Contrairement au cas des intégrales définies du type $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, où le domaine d'intégration est un intervalle fermé $[a,b]$, le domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ peut être très général :



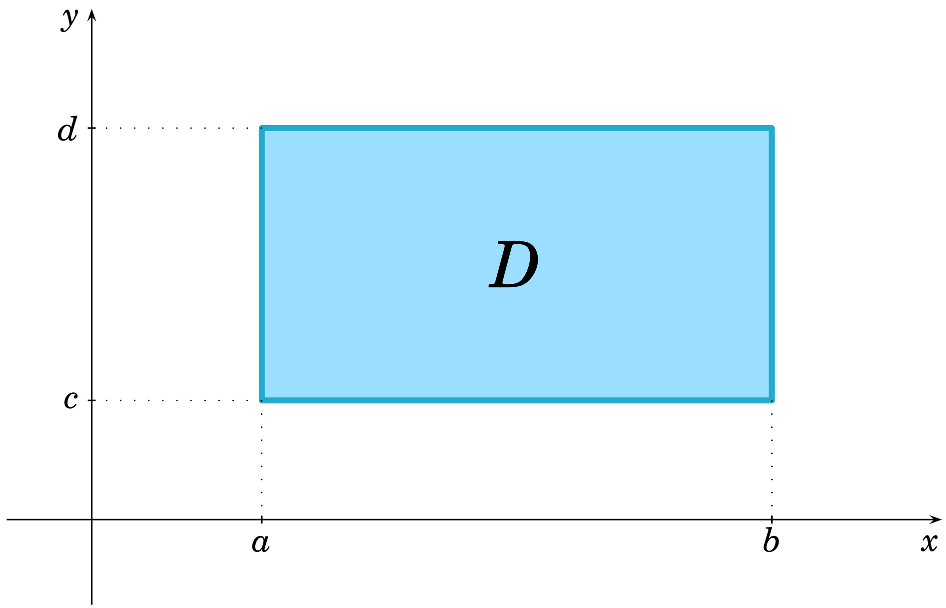
connexe (par arcs) — convexe | pas connexe (par arcs) — pas convexe | connexe (par arcs) — pas convexe

- Un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ est *connexe (par arcs)* si pour tout couple de points $\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in D$ il existe une courbe paramétrée $\vec{\varphi} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ qui relie $\vec{p}_1$ à $\vec{p}_2$ contenue dans D. Autrement dit, telle que $\vec{\varphi}(0) = \vec{p}_1$, $\vec{\varphi}(1) = \vec{p}_2$ et $\vec{\varphi}(t) \in D$ pour tout $t \in [0,1]$.
- Un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ est *convexe* si pour tout couple de points $\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in D$ le segment qui relie $\vec{p}_1$ à $\vec{p}_2$ est contenu dans D.

4.2. Intégrales doubles sur des domaines rectangulaires

Commençons par considérer le cas simple d'un rectangle fermé

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, a \leqslant x \leqslant b \, , \; c \leqslant y \leqslant d\right\} = [a,b] \times [c,d].$$



Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur le rectangle D.

Soit $y \in [c, d]$ fixé. La fonction $x \mapsto f(x, y)$ est continue par rapport à la variable x. Elle est donc intégrable par rapport à x sur l'intervalle $[a, b]$.

Soit $g(y) = \displaystyle\int_a^b f(x, y)\,dx$ (aire de la section d'ordonnée y)

Théorème. (sans démonstration)

La fonction $y \mapsto g(y) = \displaystyle\int_a^b f(x, y)\,dx$ est continue par rapport à la variable y.

Conséquence. La fonction g est intégrable par rapport à y sur l'intervalle $[c, d]$. Autrement dit, l'intégrale itérée

$$\int_c^d g(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,dx \right) dy$$

existe si f est continue sur D.

Soit maintenant $x \in [a,b]$ fixé. La fonction $y \mapsto f(x,y)$ est continue par rapport à la variable y. Elle est donc intégrable par rapport à y sur l'intervalle $[c,d]$.

Soit $h(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ (aire de la section d'abscisse x)

Théorème. (sans démonstration)

La fonction $x \mapsto h(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ est continue par rapport à la variable x.

Conséquence. La fonction h est intégrable par rapport à x sur l'intervalle $[a,b]$. Autrement dit, l'intégrale itérée

$$\int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

existe si f est continue sur D.

Théorème de Fubini. (sans démonstration)

Si f est une fonction continue sur le rectangle $D=[a,b]\times[c,d]$, alors nous avons

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy.$$

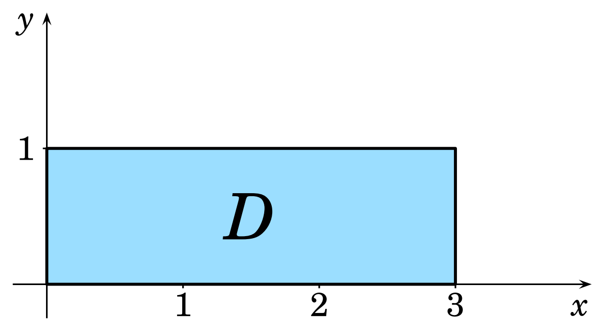
Exemples

1. Calculer l'intégrale double

$$\iint_D (16-x^2-3y^2)\,dx\,dy$$

où D est le rectangle

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leqslant x\leqslant 3,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}=[0,3]\times[0,1].$$



a) en intégrant d'abord par rapport à y et ensuite par rapport à x :

$$\int_0^1 (16-x^2-3y^2)\,dy = \Big[(16-x^2)y - y^3\Big]_0^1 = (16-x^2)1-1-0+0 = 15-x^2$$

d'où

$$\iint_D (16-x^2-3y^2)\,dx\,dy = \int_0^3 \left(\int_0^1 (16-x^2-3y^2)\,dy\right) dx = \int_0^3 (15-x^2)\,dx$$

$$= \left[15x - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 45-9-0+0 = 36$$

b) en intégrant d'abord par rapport à x et ensuite par rapport à y,

$$\iint_D (16-x^2-3y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^3 (16-x^2-3y^2)\,dx\right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(\left[(16-3y^2)x - \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=3}\right) dy$$

$$= \int_0^1 \big(3(16-3y^2)-9-0+0\big)\,dy = \int_0^1 (39-9y^2)\,dy$$

$$= \Big[39y - 3y^3\Big]_0^1 = 39-3-0+0 = 36$$

2. Calculer l'intégrale double

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

où $f(x,y)=x^2y^3-2$ et D est le rectangle $D=[0,3]\times[0,2]$,

a) en intégrant d'abord par rapport à x et ensuite par rapport à y :

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2\left(\int_0^3 (x^2y^3-2)\,dx\right)dy = \int_0^2\left(\left[\frac{1}{3}x^3y^3-2x\right]_{x=0}^{x=3}\right)dy$$

$$= \int_0^2 (9y^3-6)\,dy = \left[\frac{9}{4}y^4-6y\right]_0^2 = 36-12=24\,.$$

b) en intégrant d'abord par rapport à y et ensuite par rapport à x :

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^3\left(\int_0^2 (x^2y^3-2)\,dy\right)dx = \int_0^3\left(\left[\frac{1}{4}x^2y^4-2y\right]_{y=0}^{y=2}\right)dx$$

$$= \int_0^3 (4x^2-4)\,dx = \left[\frac{4}{3}x^3-4x\right]_0^3 = 36-12=24\,.$$

3. Calculer l'intégrale double

$$\iint_D x\cos(xy)\,dx\,dy$$

où D est le rectangle $D = [0,\pi]\times[0,3] = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leqslant x\leqslant\pi,\ 0\leqslant y\leqslant 3\right\}$.

Nous avons

$$\begin{aligned}\iint_D x\cos(xy)\,dx\,dy &= \int_0^{\pi}\left(\int_0^3 x\cos(xy)\,dy\right)dx = \int_0^{\pi}\left(\Big[\sin(xy)\Big]_{y=0}^{y=3}\right)dx\\ &= \int_0^{\pi}\sin(3x)\,dx = \left[\frac{-\cos(3x)}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{3}-\frac{-1}{3} = \frac{2}{3}\,.\end{aligned}$$