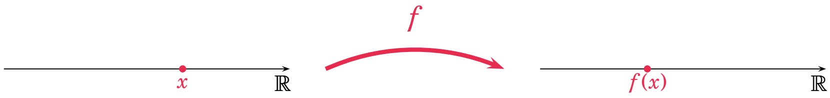
3. Fonctions réelles de plusieurs variables

3.1. Définitions et exemples

Rappel. Une *fonction réelle d'une variable réelle* est une application f d'un sous-ensemble $D(f) \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: à chaque $x \in D(f)$ correspond de manière unique son image $f(x) \in \mathbb{R}$.

On note
$$\begin{aligned} f : D(f) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Illustration :



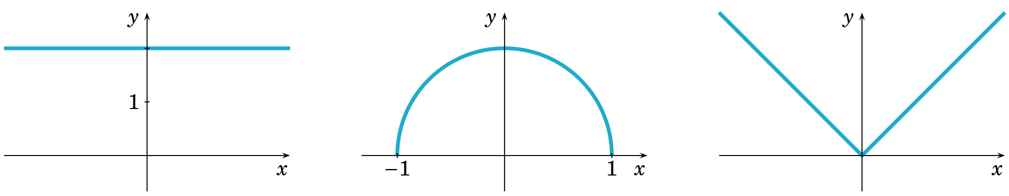
Le sous-ensemble $D(f) \subset \mathbb{R}$ est appelé *domaine de définition* de f. Si l'on ne donne pas $D(f)$ explicitement, on considère alors le plus grand domaine de définition possible.

On appelle *image* de la fonction f, l'ensemble
$$\operatorname{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \text{ pour un certain } x \in D(f)\} \subset \mathbb{R}.$$

Le *graphe* de f est l'ensemble de tous les points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que
$$x \in D(f) \quad \text{et} \quad y = f(x).$$

Exemples

1. $f(x) = 2$, avec $D(f) = \mathbb{R}$.
   Le graphe de f est la droite $y = 2$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$, avec $D(g) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leqslant 1\}$.
   Si $y = g(x)$, alors $x^2 + y^2 = 1$ et $y \geqslant 0$. Le graphe de g est alors un demi-cercle de rayon 1 centré à l'origine.
3. $h(x) = \sqrt{x^2} = |x|$, avec $D(h) = \mathbb{R}$.
   Le graphe de h est la réunion de deux demi-droites.

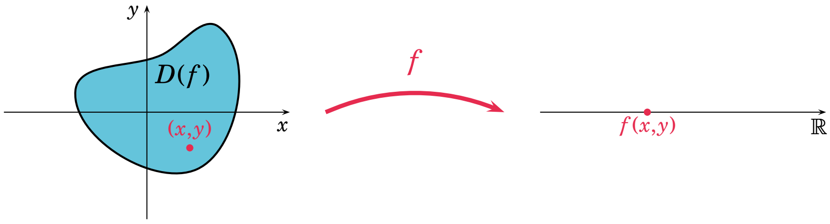


Graphes de f, g et h

Définition. Une *fonction réelle de deux variables réelles* est une application f d'un sous-ensemble $D(f) \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$: à chaque point $(x,y) \in D(f)$ correspond de manière unique son image $f(x,y) \in \mathbb{R}$.

On note
$$\begin{aligned} f : D(f) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto f(x,y) \end{aligned}$$

Illustration :



Le sous-ensemble $D(f) \subset \mathbb{R}^2$ est appelé *domaine de définition* de f. Si l'on ne donne pas $D(f)$ explicitement, on considère alors le plus grand domaine de définition possible.

On appelle *image* de la fonction f, l'ensemble

$$\operatorname{Im}(f) = \{z \in \mathbb{R} : z = f(x,y) \text{ pour un certain } (x,y) \in D(f)\} \subset \mathbb{R}.$$

Le *graphe* de f est l'ensemble de tous les points $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$(x,y) \in D(f) \quad \text{et} \quad z = f(x,y).$$

Remarque. On peut voir $f(x,y)$ comme l'altitude au point de coordonnées $(x,y) \in D(f)$.

Exemples

1. $f(x,y) = xy$

Nous avons $D(f) = \mathbb{R}^2$ et $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$.

2. $f(x,y) = x^2 + y^2$

Nous avons $D(f) = \mathbb{R}^2$ et $\operatorname{Im}(f) = [0,\infty[$.

3. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

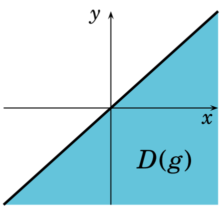
Nous avons $D(f) = \mathbb{R}^2$ et $\operatorname{Im}(f) = [0,\infty[$.

4. $g(x,y) = \sqrt{x-y}$.

Nous avons $\operatorname{Im}(g) = [0,\infty[$ et

$$(x,y) \in D(g) \quad \Longleftrightarrow \quad x - y \geqslant 0$$

Par conséquent, $D(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant y\}$.

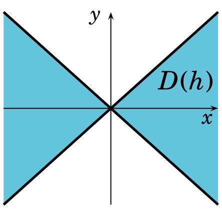


5. $h(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$.

Nous avons $\operatorname{Im}(h) = [0,\infty[$ et

$$\begin{aligned} (x,y) \in D(h) &\Longleftrightarrow x^2 - y^2 \geqslant 0 \\ &\Longleftrightarrow (x-y)(x+y) \geqslant 0 \end{aligned}$$

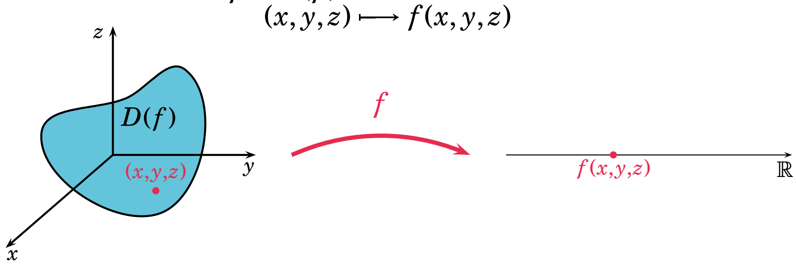
Par conséquent, $D(h) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -|x| \leqslant y \leqslant |x|\}$.



Définition. Une *fonction réelle de trois variables réelles* est une application f d'un sous-ensemble $D(f) \subset \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$: à chaque point $(x,y,z) \in D(f)$ correspond de manière unique son image $f(x,y,z) \in \mathbb{R}$.

On note
$$f: \begin{array}{rcl} D(f) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z) \end{array}$$

Illustration :



Le sous-ensemble $D(f) \subset \mathbb{R}^3$ est appelé *domaine de définition* de f. Si l'on ne donne pas $D(f)$ explicitement, on considère alors le plus grand domaine de définition possible.

On appelle *image* de la fonction f, l'ensemble
$$\mathrm{Im}(f) = \{u \in \mathbb{R} : u = f(x,y,z) \text{ pour un certain } (x,y,z) \in D(f)\} \subset \mathbb{R}.$$
Le *graphe* de f est l'ensemble de tous les points $(x,y,z,u) \in \mathbb{R}^4$ tels que
$$(x,y,z) \in D(f) \quad \text{et} \quad u = f(x,y,z).$$

Remarque. On peut voir $f(x,y,z)$ comme la densité au point de coordonnées $(x,y,z) \in D(f)$.

Exemples

1. $f(x,y,z) = 3x - 2y + 5z - 1$

   Nous avons $D(f) = \mathbb{R}^3$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.

2. $g(x,y,z) = \sqrt{x+y-z}$

   Nous avons $D(g) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y \geqslant z\}$ et $\mathrm{Im}(g) = [0,\infty[$.

   Le domaine de g est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ situés au-dessous du plan $z = x+y$.

3. $h(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$

   Nous avons $D(h) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ et $\mathrm{Im}(h) =]0,\infty[$.

   Le domaine de h est formé de tous les points de $\mathbb{R}^3$ différents de l'origine.

De manière générale nous avons :

Définition. Une *fonction réelle de n variables réelles* est une application f d'un sous-ensemble $D(f) \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$: à chaque point $(x_1, \dots, x_n) \in D(f)$ correspond de manière unique son image $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$.

On note $$f : \begin{array}{ccc} D(f) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & f(x_1, \dots, x_n) \end{array} \qquad \text{ou} \qquad f : \begin{array}{ccc} D(f) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{x} & \longmapsto & f(\vec{x}) \end{array}$$

Le sous-ensemble $D(f) \subset \mathbb{R}^n$ est appelé *domaine de définition* de f. Si l'on ne donne pas $D(f)$ explicitement, on considère alors le plus grand domaine de définition.

On appelle *image* de la fonction f, l'ensemble

$$\mathrm{Im}(f) = \{x_{n+1} \in \mathbb{R} : x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n) \text{ pour un certain } (x_1, \dots, x_n) \in D(f)\} \subset \mathbb{R}.$$

Le *graphe* de f est l'ensemble de tous les points $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

1. $(x_1, \dots, x_n) \in D(f)$,
2. $x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)$.

Remarque. On peut aussi étudier des fonctions

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \big(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\big) \end{array}$$

mais cela revient à étudier m fonctions réelles de n variables réelles :

$$f_j : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & f_j(x_1, \dots, x_n) \end{array} \qquad \text{avec } j = 1, \dots, m.$$

3.2. Le graphe d'une fonction de deux variables

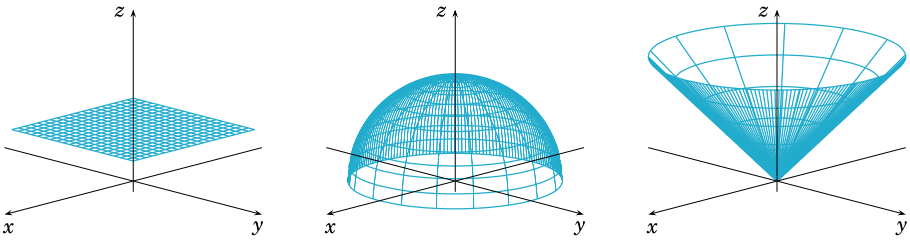
Définition. Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

Le *graphe de la fonction f* est l'ensemble

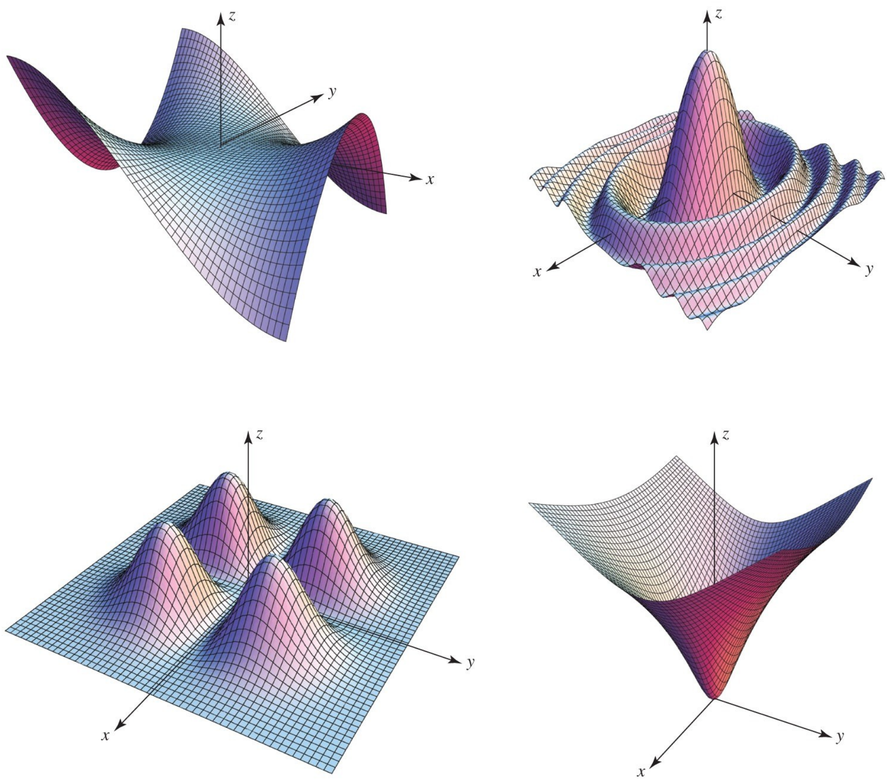
$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D(f) \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad z = f(x,y)\} \subset \mathbb{R}^3$$

Exemples

1. $f(x,y) = 2$, avec $D(f) = \mathbb{R}^2$.
   Le graphe de f est le plan $z = 2$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $g(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, avec $D(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.
   Si $z = g(x,y)$, alors $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et $z \geqslant 0$. Le graphe de g est alors une demi-sphère.
3. $h(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, avec $D(h) = \mathbb{R}^2$. Le graphe de h est un cône.



Graphes de f, g et h



Quelques graphes de fonctions de deux variables

Courbes de niveau

En général, il est difficile d'esquisser le graphe d'une fonction de deux variables. Pour nous aider à le faire, nous allons considérer les courbes de niveau ou ensembles de niveau :

Définition. Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

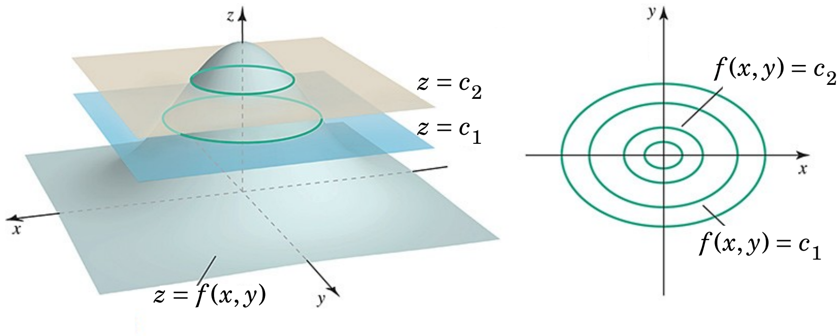
Si $c \in \mathrm{Im}(f)$, la *courbe de niveau* c de f est le sous-ensemble

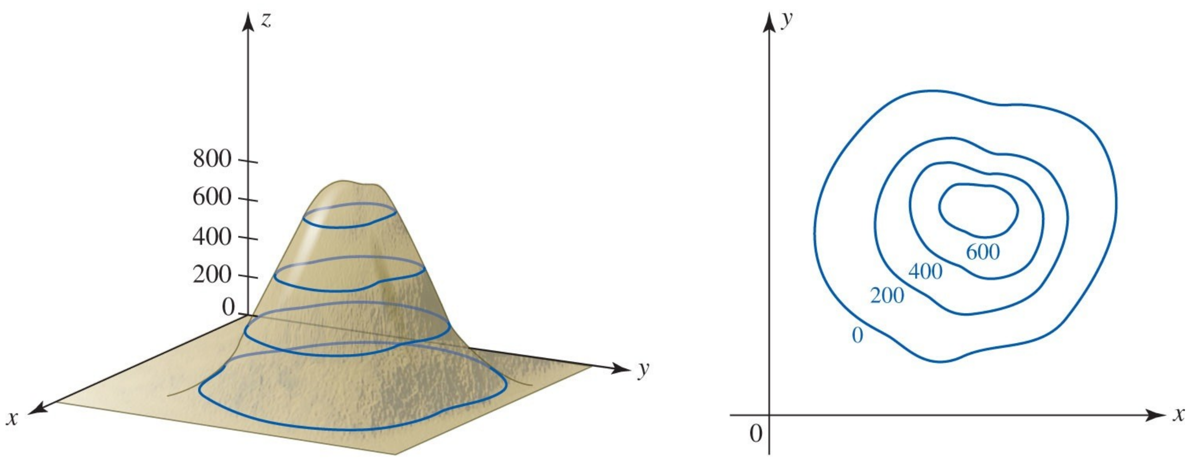
$$L(c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\} \subset \mathbb{R}^2 .$$

Si $c \notin \mathrm{Im}(f)$, on pose $L(c) = \emptyset$.

Géométriquement, la courbe de niveau c est la trace obtenue en coupant le graphe de f par le plan horizontal $z = c$, dessinée sur le plan $0xy$.

Pour construire le graphe à partir des courbes de niveau, il faut placer chaque courbe de niveau c à la hauteur $z = c$.



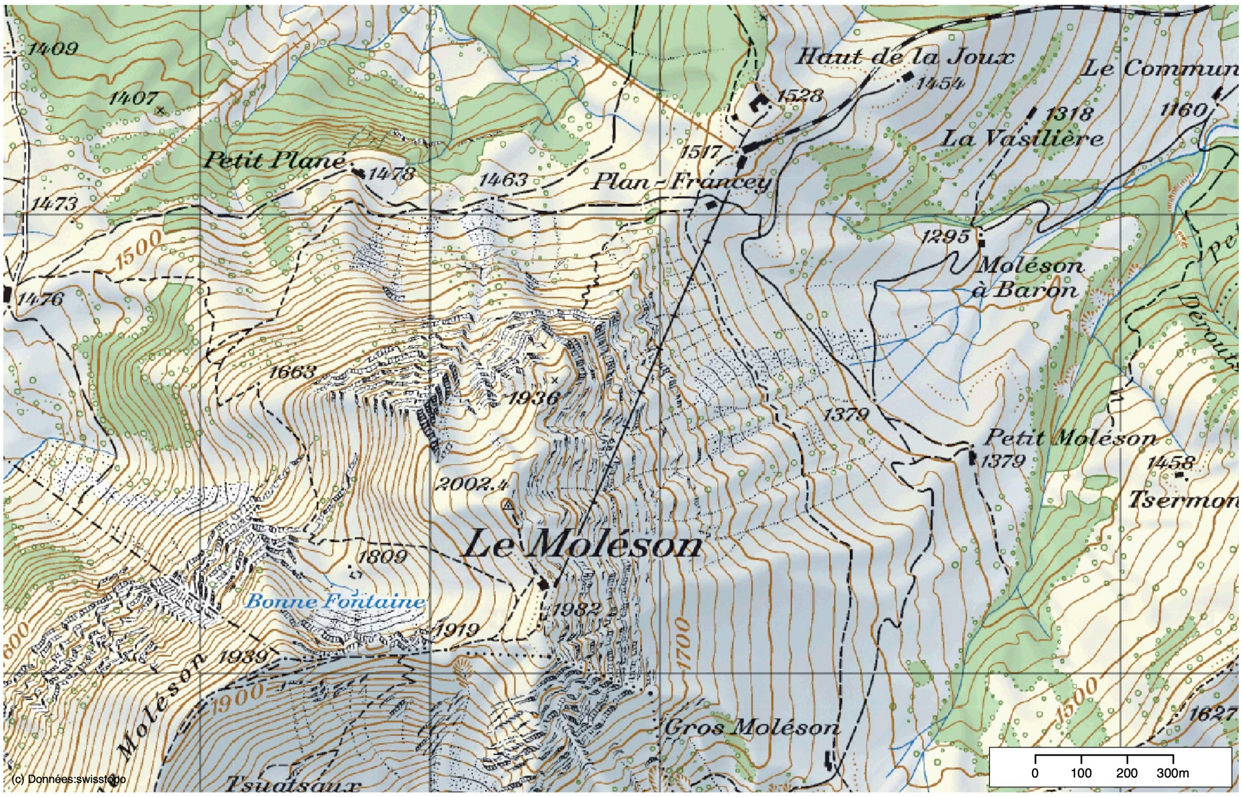


map.geo.admin.ch

www.geo.admin.ch

geo.admin.ch, le géoportail fédéral

Echelle 1: 10,000



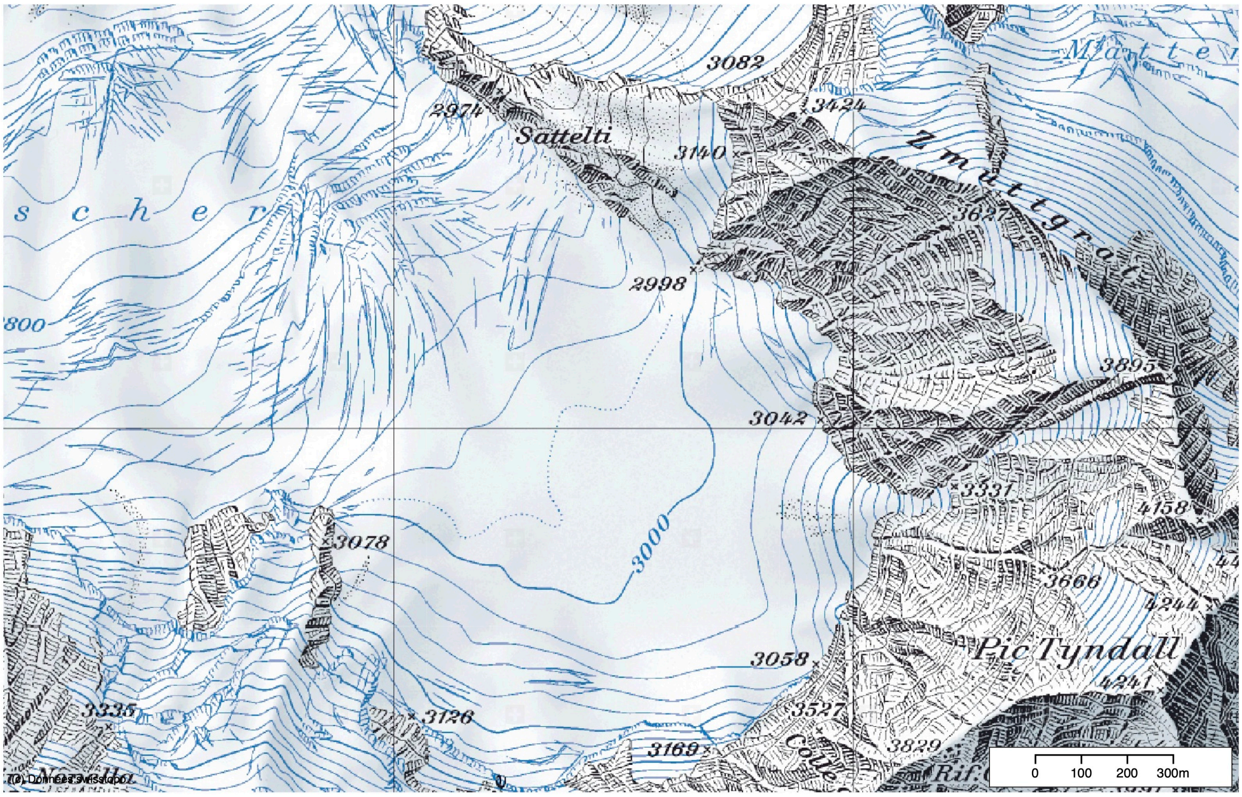
www.geo.admin.ch est un portail d'accès aux informations géolocalisées, données et services qui sont mis à disposition par l'administration fédérale

map.geo.admin.ch

www.geo.admin.ch

geo.admin.ch, le géoportail fédéral

Echelle 1: 10,000

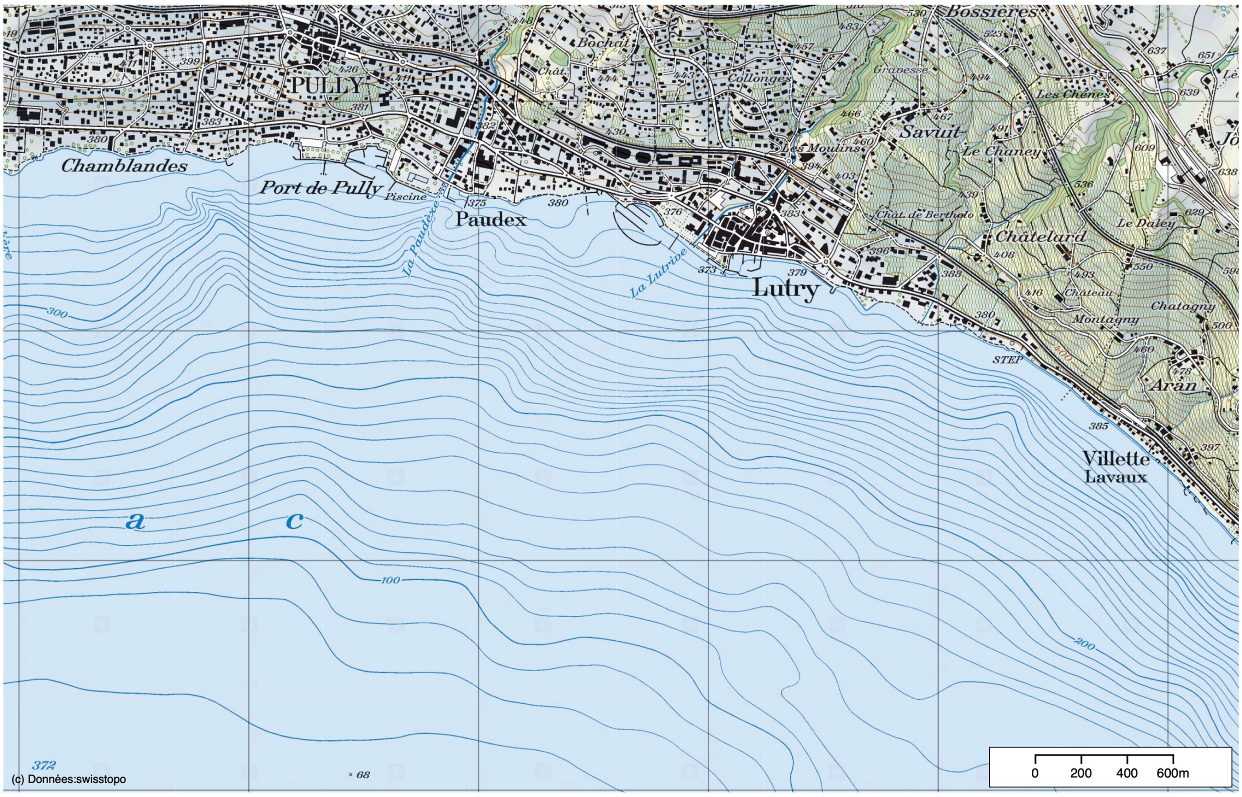


www.geo.admin.ch est un portail d'accès aux informations géolocalisées, données et services qui sont mis à disposition par l'administration fédérale

Responsabilité: Malgré la grande attention qu'elles portent à la justesse des informations diffusées sur ce site, les autorités fédérales ne peuvent endosser aucune responsabilité quant à la fidélité, à l'exactitude, à l'actualité, à la fiabilité et à l'intégralité de ces informations. Droits d'auteur: autorités de la Confédération suisse, 2007. http://www.disclaimer.admin.ch/conditions_dutilisation.html

map.geo.admin.ch www.geo.admin.ch
geo.admin.ch, le géoportail fédéral

Echelle 1: 20,000



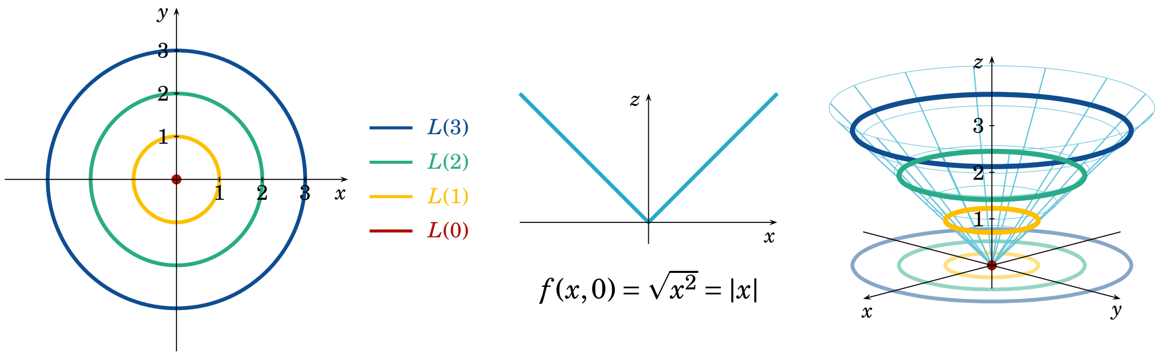
Exemples

1. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

Nous avons $\mathrm{Im}(f)=[0,\infty[$. Comme

$$f(x,y)=c \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sqrt{x^2+y^2}=c \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2+y^2=c^2$$

la courbe de niveau $c>0$ de la fonction f est le cercle de rayon c centré à l'origine et la courbe de niveau 0 est le point $(0,0)$.



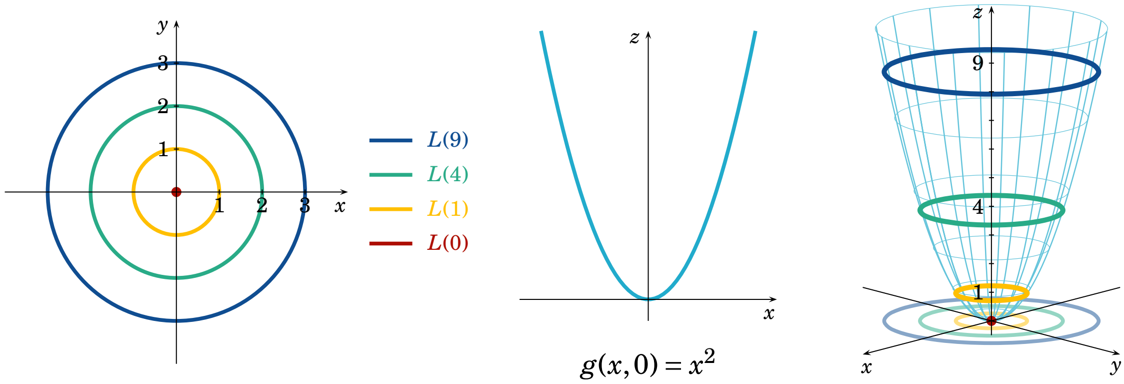
Courbes de niveau, coupe verticale en $y=0$ et graphe de la fonction f

2. $g(x,y) = x^2 + y^2$.

Nous avons $\operatorname{Im}(g) = [0,\infty[$. Comme

$$g(x,y) = c \iff x^2 + y^2 = c \iff x^2 + y^2 = (\sqrt{c}\,)^2$$

la courbe de niveau $c > 0$ de la fonction g est le cercle de rayon $\sqrt{c}$ centré à l'origine et la courbe de niveau 0 est le point $(0,0)$.



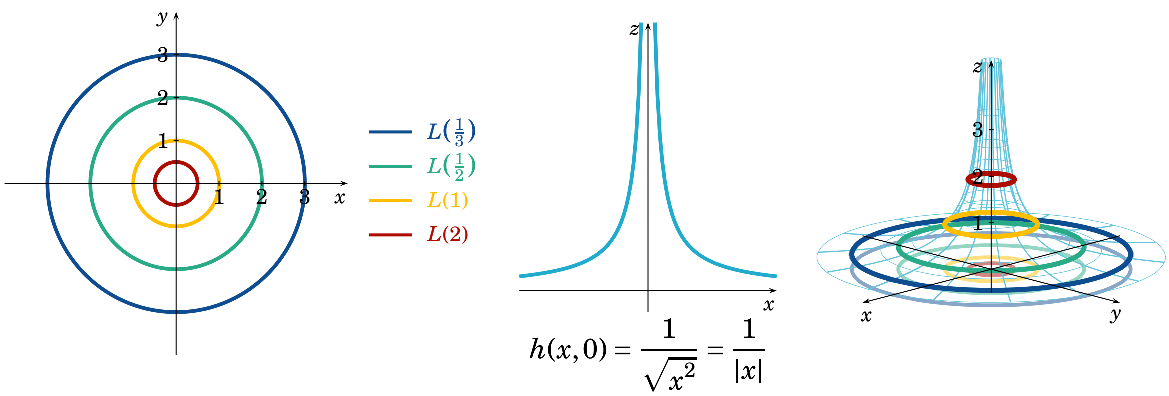
Courbes de niveau, coupe verticale en $y = 0$ et graphe de la fonction g

3. $h(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Nous avons $\operatorname{Im}(h) =]0,\infty[$. Comme

$$h(x,y) = c \iff \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = c \iff x^2 + y^2 = \frac{1}{c^2}$$

la courbe de niveau $c > 0$ de la fonction h est le cercle de rayon $\frac{1}{c}$ centré à l'origine.



Courbes de niveau, coupe verticale en $y = 0$ et graphe de la fonction h

4. Déterminer les courbes de niveau de la fonction

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Le domaine de la fonction f est $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Les points de la courbe de niveau c satisfont l'équation

$$f(x,y) = c \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - y^2 = c(x^2 + y^2) \quad \Longleftrightarrow \quad (1-c)x^2 = (1+c)y^2$$

Considérons quelques cas particuliers :

- Si $c = 1$ alors $y^2 = 0$ et $L(1)$ est la droite $y = 0$.
- Si $c = -1$ alors $x^2 = 0$ et $L(-1)$ est la droite $x = 0$.
- Si $c = 0$ alors $y^2 = x^2$ et $L(0)$ est formée des deux droites $y = \pm x$.

Revenons au cas général :

$$(1-c)x^2 = (1+c)y^2$$

Comme $x^2 \geqslant 0$ et $y^2 \geqslant 0$, si $1+c$ et $1-c$ ont des signes différents, alors la seule solution de l'équation $(1-c)x^2 = (1+c)y^2$ est $(x,y) = (0,0)$, ce qui n'est pas possible car $(0,0) \notin D(f)$. Par conséquent dans ce cas, l'ensemble $L(c)$ est vide.

Ainsi, pour avoir des solutions, il faut avoir

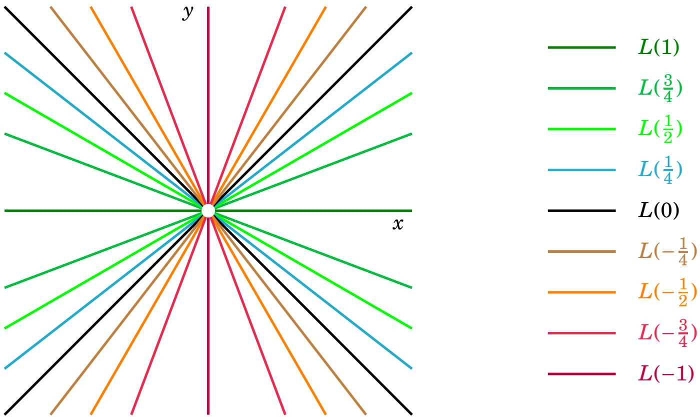
$$(1-c)(1+c) \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - c^2 \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \geqslant c^2 \quad \Longleftrightarrow \quad -1 \leqslant c \leqslant 1$$

Si $-1 < c < 1$, alors on a

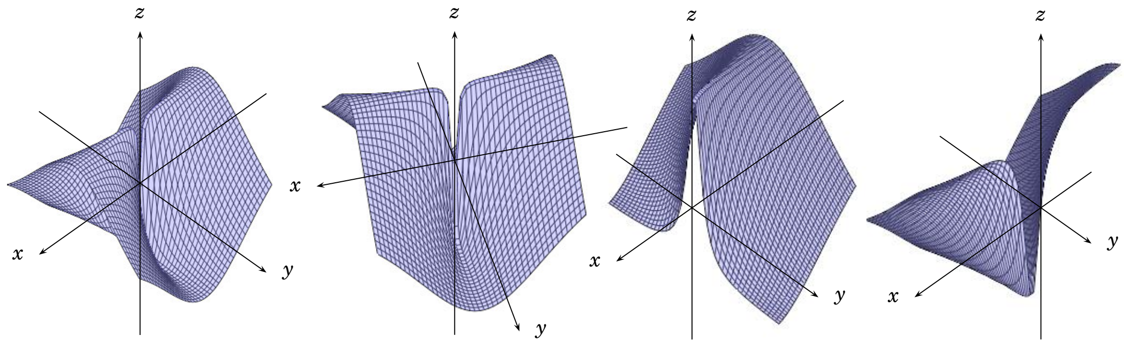
$$y^2 = \frac{1-c}{1+c}x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{\frac{1-c}{1+c}}\,x$$

et $L(c)$ est formée de deux droites.

Ainsi par exemple, $L(-\frac{1}{2})$ est formée des deux droites $y = \pm\sqrt{3}x$.



Quelques courbes de niveau de f



Quelques esquisses du graphe de f

Surfaces de niveau

Dans le cas général, on peut définir :

Définition. Soit f une fonction de n variables. Les *surfaces de niveau* de f sont les sous-ensembles de $D(f) \subset \mathbb{R}^n$ pour lesquels f est constante.
Si $c \in \mathrm{Im}(f)$, la *surface de niveau* c de f est le sous-ensemble

$$L(c) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : f(x_1, \ldots, x_n) = c\} \subset \mathbb{R}^n .$$

Si $c \notin \mathrm{Im}(f)$, on pose $L(c) = \emptyset$.

Exemple

Soit $f(x,y,z) = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$.

Ici $\mathrm{Im}(f) = [0,1]$, la surface de niveau $0 \leqslant c \leqslant 1$ étant la sphère de centre $(0,0,0)$ et de rayon $\sqrt{1-c^2}$:

$$f(x,y,z) = c \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{1-x^2-y^2-z^2} = c \quad \Longleftrightarrow \quad x^2+y^2+z^2 = 1-c^2$$

3.3. Limite et continuité

Rappel.

Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable et soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

On dit que la *limite de f en x_0* existe et est égale à ℓ, notée

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

si $f(x)$ est aussi proche de ℓ que l'on veut dès que x est suffisamment proche de x_0.

Plus précisément, si pour tout $\varepsilon > 0$ (aussi petit que voulu), il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{alors} \quad \left| f(x) - \ell \right| < \varepsilon$$

Rappel.

Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable et soit $x_0 \in D(f)$.

On dit que la fonction f est *continue au point x_0* si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

On dit que la fonction f est *continue* si elle est continue en tout point de son domaine.

Nous aimerions étudier ces notions dans le cadre des fonctions de plusieurs variables :

Définition. Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction de n variables et soit $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

On dit que la *limite de f en $\vec{x}_0$* existe et est égale à ℓ, notée

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = \ell$$

si $f(\vec{x})$ est aussi proche de ℓ que l'on veut dès que $\vec{x}$ est suffisamment proche de $\vec{x}_0$.

Plus précisément, si pour tout $\varepsilon > 0$ (aussi petit que voulu), il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\text{si} \quad 0 < \left\| \vec{x} - \vec{x}_0 \right\| < \delta \quad \text{alors} \quad \left| f(\vec{x}) - \ell \right| < \varepsilon$$

En particulier, dans le cadre des fonctions de deux variables :

Définition. Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

On dit que la *limite de f en (x_0, y_0)* existe et est égale à ℓ, notée

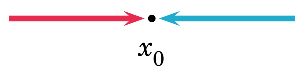
$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y) = \ell$$

si $f(x, y)$ est aussi proche de ℓ que l'on veut dès que (x, y) est suffisamment proche de (x_0, y_0).

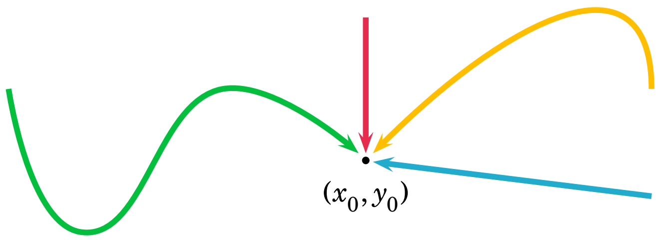
Plus précisément, si pour tout $\varepsilon > 0$ (aussi petit que voulu), il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\text{si} \quad 0 < \left\| (x, y) - (x_0, y_0) \right\| < \delta \quad \text{alors} \quad \left| f(x, y) - \ell \right| < \varepsilon$$

Rappel. Pour les fonctions d'une variable, il arrive qu'une limite n'existe pas, par exemple si $\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$. En particulier, il n'y a que deux manières d'approcher x_0 :



Dans le cas des fonctions de deux variables, nous pouvons approcher (x_0, y_0) de plusieurs manières :



Ainsi, dans ce cas, pour que la limite existe, il faut trouver le même nombre ℓ quelque soit le parcours choisi !

Par conséquent, pour montrer qu'une limite n'existe pas, il suffit de trouver deux parcours vers (x_0, y_0) qui donnent des résultats différents.

De manière générale, l'étude des courbes de niveau d'une fonction peut être utile pour déterminer qu'une limite n'existe pas. En particulier, la limite n'existe pas en chaque point où il y aurait un croisement de deux courbes de niveau.

Exemple

Soit $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, avec $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Montrer que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

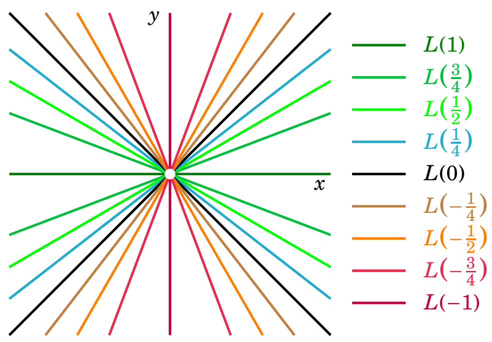
Comme

$$f(x,0) = \frac{x^2 - 0^2}{x^2 + 0^2} = 1 \quad \text{et} \quad f(0,y) = \frac{0^2 - y^2}{0^2 + y^2} = -1,$$

nous trouvons

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 1 \neq -1 = \lim_{y\to 0} f(0,y).$$

Par conséquent, la limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.



Remarque. Nous avons vu que les courbes de niveau de f sont des droites qui passent par l'origine. Comme

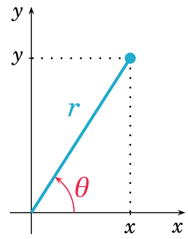
$$f(x, mx) = \frac{x^2 - m^2x^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{x^2(1-m^2)}{x^2(1+m^2)} = \frac{1-m^2}{1+m^2},$$

pour chaque valeur *fixée* de $m \in \mathbb{R}$, nous obtenons

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \frac{1-m^2}{1+m^2}.$$

Question. Comment montrer qu'une limite existe ?

Problème. Considérer *tous* les parcours possibles.



Réponse possible. Pour calculer des limites de la forme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nous pouvons utiliser les coordonnées polaires

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta), \\ y = r\sin(\theta). \end{cases}$$

Dans ce cas, pour tenir compte de *toutes* les approches possibles $(x,y)\to(0,0)$, nous pouvons considérer la limite $r\to 0$ pour θ arbitraire mais pas fixé. Autrement dit, si nous arrivons à trouver deux fonctions g et h telles que

$$g(r) \leqslant f\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) \leqslant h(r) \qquad \text{pour tout } \theta\in\mathbb{R}$$

qui satisfont

$$\lim_{r\to 0} g(r) = \ell = \lim_{r\to 0} h(r)$$

alors le théorème du sandwich (ou des deux gendarmes) nous donne

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell\,.$$

Exemples

1. Soit $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$, avec $D(f) = \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Calculer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ (si la limite existe).

Comme $f(x,0) = \dfrac{x^2\cdot 0}{x^2+0^2} = 0$ et $f(0,y) = \dfrac{0^2y}{0^2+y^2} = 0$, si la limite existe, elle vaut 0.

Nous avons

$$f\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) = \frac{(r\cos(\theta))^2 r\sin(\theta)}{(r\cos(\theta))^2+(r\sin(\theta))^2} = \frac{r^3\cos^2(\theta)\sin(\theta)}{r^2}$$

$$= r\cos^2(\theta)\sin(\theta)$$

Comme

$$-r \leqslant r\cos^2(\theta)\sin(\theta) \leqslant r \qquad \text{pour tout } \theta\in\mathbb{R}$$

et

$$\lim_{r\to 0}(-r) = 0 = \lim_{r\to 0} r\,,$$

nous trouvons donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0\,.$$

2. Soit $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, avec $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Calculer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ (si la limite existe).

Nous avons

$$\begin{aligned} f\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) &= \frac{(r\cos(\theta))^2 - (r\sin(\theta))^2}{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2} = \frac{r^2(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))}{r^2} \\ &= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = \cos(2\theta) \end{aligned}$$

Comme

$$-1 \leqslant \cos(2\theta) \leqslant 1 \qquad \text{pour tout } \theta \in \mathbb{R}$$

nous trouvons une valeur différente pour chaque $\theta \in \mathbb{R}$ et par conséquent, nous concluons que la limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

3. Soit $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$, avec $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Calculer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ (si la limite existe).

Comme $f(x,0) = \dfrac{x^2 \cdot 0}{x^4 + 0^2} = 0$ et $f(0,y) = \dfrac{0^2 y}{0^4 + y^2} = 0$, si la limite existe, elle vaut 0.

Nous avons

$$f\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) = \frac{(r\cos(\theta))^2 r\sin(\theta)}{(r\cos(\theta))^4 + (r\sin(\theta))^2} = \frac{r\cos^2(\theta)\sin(\theta)}{r^2\cos^4(\theta) + \sin^2(\theta)}$$

Vu que pour chaque $\theta = \theta_c$ fixé,

$$\lim_{r\to 0} \frac{r\cos^2(\theta_c)\sin(\theta_c)}{r^2\cos^4(\theta_c) + \sin^2(\theta_c)} = 0$$

nous sommes tentés de conclure que la limite existe et vaut 0, mais un encadrement pour θ arbitraire mais pas fixé semble difficile à trouver.

Pour montrer que la limite n'existe pas, il suffit de trouver deux trajectoires vers $(0,0)$ qui donnent des valeurs differentes. Comme le calcul

$$f(x, ax^2) = \frac{x^2 a x^2}{x^4 + (ax^2)^2} = \frac{ax^4}{(1+a^2)x^4} = \frac{a}{1+a^2}$$

nous dit que l'arc de parabole $y = ax^2$ (avec $x \neq 0$) est la courbe de niveau $\frac{a}{1+a^2}$ de f, pour chaque $a \neq 0$ fixé nous avons

$$\lim_{x\to 0} f(x, ax^2) = \frac{a}{1+a^2} \neq 0.$$

Définition. Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et soit $(x_0, y_0) \in D(f)$.
On dit que la fonction f est *continue au point* (x_0, y_0) si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Plus précisément, si pour tout $\varepsilon > 0$ (aussi petit que voulu), il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\text{si} \quad 0 < \|(x,y)-(x_0,y_0)\| < \delta \quad \text{alors} \quad |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$$

On dit que la fonction f est *continue* si elle est continue en tout point de son domaine.

Remarques.

- Si f et g sont continues en (x_0, y_0), alors la somme $f + g$ et le produit fg sont continues en (x_0, y_0). Si de plus, $g(x_0, y_0) \neq 0$, alors le quotient $\dfrac{f}{g}$ est aussi continu en (x_0, y_0).
- Si $f : D(f) \to \mathbb{R}$ est une fonction de deux variables continue en (x_0, y_0) et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction d'une variable continue en $z_0 = f(x_0, y_0)$, alors la composition

$$\begin{aligned} g\circ f : D(f) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto g\big(f(x,y)\big) \end{aligned}$$

  est continue en (x_0, y_0).

Exemple

Etudier la continuité de la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Comme les fonctions $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$, les fonctions

$$(x,y)\mapsto x^2, \qquad (x,y)\mapsto y^2, \qquad (x,y)\mapsto x^2-y^2, \qquad (x,y)\mapsto x^2+y^2$$

sont aussi continues sur $\mathbb{R}^2$ et la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
D'autre part, nous avons vu que la limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas et par conséquent la fonction f *n'est pas* continue en $(0,0)$.

Prolongement par continuité

Si la fonction $f: D(f) \to \mathbb{R}$ est définie dans un voisinage de $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *sauf* en (x_0, y_0) et si $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$ existe, alors il est possible de prolonger f par continuité :

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \neq (x_0,y_0) \\ \ell & \text{si } (x,y) = (x_0,y_0) \end{cases}$$

Exemple

La fonction $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$ est continue sur $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Comme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ alors il est possible de prolonger f par continuité :

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

3.4. Dérivées partielles

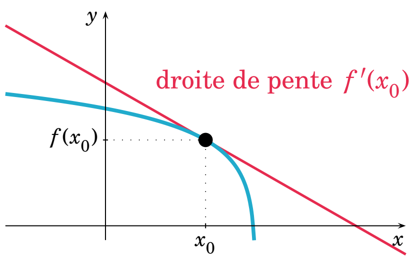
Rappel. Soit $f: D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable et soit $x_0 \in D(f)$ tel que f est définie dans un voisinage de x_0.

On dit que f est dérivable en x_0 si la limite $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe et on note

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

la dérivée de f en x_0.

Géométriquement, $f'(x_0)$ est la pente de la droite tangente au graphe de la fonction f au point $(x_0, f(x_0))$:



Remarque. La dérivée f' peut aussi être notée $\dfrac{df}{dx}$.

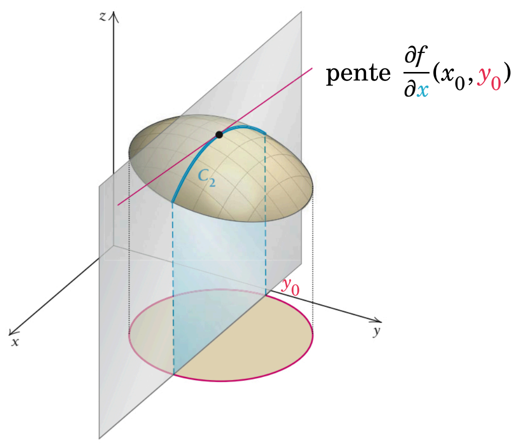
Définition. Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et soit $(x_0, y_0) \in D(f) \subset \mathbb{R}^2$ tel que f est définie dans un voisinage de (x_0, y_0), par exemple $B\big((x_0, y_0), r\big)$, avec $r > 0$.

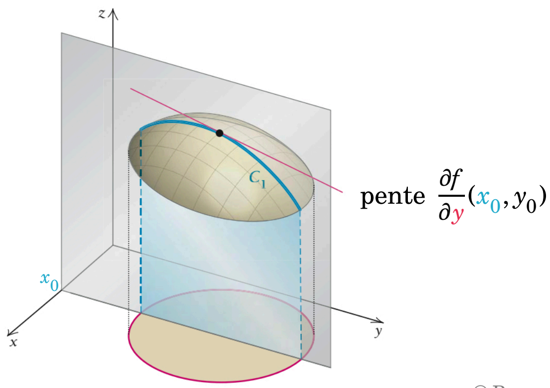
- Si la fonction $g(x) = f(x, y_0)$ est dérivable en x_0 on dit que la *dérivée partielle de f par rapport à x*, notée $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, existe et est égale à $g'(x_0)$:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$
- Si la fonction $h(y) = f(x_0, y)$ est dérivable en y_0 on dit que la dérivée partielle de f par rapport à y, notée $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, existe et est égale à $h'(y_0)$:
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Notations alternatives :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \partial_x f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) = \partial_1 f(x_0, y_0) = f'_1(x_0, y_0)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \partial_y f(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = \partial_2 f(x_0, y_0) = f'_2(x_0, y_0)$$

Interprétation géométrique des dérivées partielles





L'ensemble de tous les points de $\mathbb{R}^3$ tels que $y = y_0$ est un plan parallèle au plan $0xz$ qui coupe le graphe de f le long de la courbe C_2. La pente de la droite tangente à la courbe C_2 au point $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$ est la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.

L'ensemble de tous les points de $\mathbb{R}^3$ tels que $x = x_0$ est un plan parallèle au plan $0yz$ qui coupe le graphe de f le long de la courbe C_1. La pente de la droite tangente à la courbe C_1 au point $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$ est la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

- Si les dérivées partielles de f par rapport à x et y existent, on dit que le *gradient de f*, noté $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$, existe et est donné par

$$\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Parfois on écrira $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$.

Le symbole ∇ est appelé « nabla » (il s'agit de la lettre greque Delta inversée).

Méthode pour calculer les dérivées partielles

- Pour calculer la dérivée partielle de f par rapport à x, on regarde y comme une constante et on dérive la fonction $f(x, y)$ par rapport à x en utilisant les règles de dérivation des fonctions d'une variable.
- Pour calculer la dérivée partielle de f par rapport à y, on regarde x comme une constante et on d'erive la fonction $f(x, y)$ par rapport à y en utilisant les règles de dérivation des fonctions d'une variable.

Exemples

Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = 3x + y^2$

   Nous avons

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}(3x) + \frac{\partial}{\partial x}(y^2) = 3 + 0 = 3 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}(3x) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 0 + 2y = 2y \end{aligned}\right\} \implies \vec{\nabla} f(x, y) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2y \end{pmatrix}$$

2. $g(x, y) = x^3 y^4$

   Nous avons

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= y^4 \frac{\partial}{\partial x}(x^3) = 3x^2 y^4 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= x^3 \frac{\partial}{\partial y}(y^4) = 4x^3 y^3 \end{aligned}\right\} \implies \vec{\nabla} g(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 y^4 \\ 4x^3 y^3 \end{pmatrix}$$

3. $h(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ (distance à l'origine)

Considérons tout d'abord la fonction d'une variable

$$f(u)=\sqrt{u^2+c}=(u^2+c)^{1/2} \qquad \text{avec } c\in\mathbb{R} \text{ une constante.}$$

Nous avons

$$f'(u)=\frac{1}{2}(u^2+c)^{-1/2}(u^2+c)'=\frac{1}{2}(u^2+c)^{-1/2}(2u)=u(u^2+c)^{-1/2}=\frac{u}{\sqrt{u^2+c}}$$

Par conséquent,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{aligned}\right\} \implies \vec{\nabla}h(x,y)=\begin{pmatrix}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{pmatrix}$$

4. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

Si $(x,y)\neq(0,0)$ nous avons :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)=\frac{y(x^2+y^2)-xy(2x)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{(par calcul direct ou par symétrie car ici } f(a,b)=f(b,a))$$

Si $(x,y)=(0,0)$ nous avons :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h\cdot 0}{h^2+0^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0\cdot h}{0^2+h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

Accessoirement, pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ nous pouvons aussi considérer la fonction d'une variable

$$\begin{aligned}g(x)=f(x,0) &= \begin{cases}\dfrac{x\cdot 0}{x^2+0^2} & \text{si } (x,0)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\\ &= 0 \qquad \text{pour tout } x\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Comme $g'(x)=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, nous retrouvons $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=g'(0)=0$.

En résumé,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Remarque. La notion de dérivée partielle se généralise naturellement aux fonctions de n variables avec $n \geqslant 3$.

Par exemple, si $f(x,y,z) = x^2yz + \sin(yz) + z^3 + 4\ln(xy^5)$, alors nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2yz) + \frac{\partial}{\partial x}\big(\sin(yz)\big) + \frac{\partial}{\partial x}(z^3) + \frac{\partial}{\partial x}\big(4\ln(xy^5)\big) \\
&= yz\,\frac{\partial}{\partial x}(x^2) + 0 + 0 + 4\,\frac{1}{xy^5}\,\frac{\partial}{\partial x}(xy^5) = yz(2x) + 4\,\frac{1}{xy^5}\,y^5 \\
&= 2xyz + \frac{4}{x} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial y}(x^2yz) + \frac{\partial}{\partial y}\big(\sin(yz)\big) + \frac{\partial}{\partial y}(z^3) + \frac{\partial}{\partial y}\big(4\ln(xy^5)\big) \\
&= x^2z\,\frac{\partial}{\partial y}(y) + \cos(yz)\,\frac{\partial}{\partial y}(yz) + 0 + 4\,\frac{1}{xy^5}\,\frac{\partial}{\partial y}(xy^5) \\
&= x^2z + z\cos(yz) + \frac{20xy^4}{xy^5} = x^2z + z\cos(yz) + \frac{20}{y} \\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z}(x^2yz) + \frac{\partial}{\partial z}\big(\sin(yz)\big) + \frac{\partial}{\partial z}(z^3) + \frac{\partial}{\partial z}\big(4\ln(xy^5)\big) \\
&= x^2y\,\frac{\partial}{\partial z}(z) + \cos(yz)\,\frac{\partial}{\partial z}(yz) + 3z^2 + 0 \\
&= x^2y + y\cos(yz) + 3z^2
\end{aligned}$$

Dérivées partielles d'ordre deux

Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

Si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ existe pour tout $(x_0,y_0) \in D(f)$, alors nous pouvons définir la fonction dérivée partielle de f par rapport à x :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} : D(f) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(x,y) &\longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)
\end{aligned}$$

Si $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ existe pour tout $(x_0,y_0) \in D(f)$, alors nous pouvons définir la fonction dérivée partielle de f par rapport à y :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} : D(f) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(x,y) &\longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)
\end{aligned}$$

Nous pouvons considérer les dérivées partielles de ces deux fonctions par rapport à x et y qui seront notées comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Nous avons le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & & f \arrow[dll, bend right] \arrow[drr, bend left] & & & \\
 & \frac{\partial f}{\partial x} \arrow[dl, bend right] \arrow[dr, bend left] & & & & \frac{\partial f}{\partial y} \arrow[dl, bend right] \arrow[dr, bend left] & \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}
\end{tikzcd}$$

Attention : Certains auteurs utilisent les notations $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$.

Exemples

Calculer les dérivées d'ordre deux des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = x^2 y^3$

Comme $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2)y^3 + x^2 \dfrac{\partial}{\partial x}(y^3) = 2xy^3 + 0 = 2xy^3$

nous avons

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy^3) = \frac{\partial}{\partial x}(2x)y^3 + 2x\frac{\partial}{\partial x}(y^3) = 2y^3 + 0 = 2y^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy^3) = \frac{\partial}{\partial y}(2x)y^3 + 2x\frac{\partial}{\partial y}(y^3) = 0 + 2x(3y^2) = 6xy^2$$

D'autre part, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}(x^2)y^3 + x^2\dfrac{\partial}{\partial y}(y^3) = 0 + x^2(3y^2) = 3x^2y^2$

implique

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2)y^2 + 3x^2\frac{\partial}{\partial x}(y^2) = 6xy^2 + 0 = 6xy^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2)y^2 + 3x^2\frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 0 + 3x^2(2y) = 6x^2y$$

2. $g(x,y) = \sin(xy)$

Nous avons
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \cos(xy)\,\frac{\partial}{\partial x}(xy) = y\cos(xy)$$
d'où
$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\big(y\cos(xy)\big) = \frac{\partial}{\partial x}(y)\cos(xy) + y\,\frac{\partial}{\partial x}\big(\cos(xy)\big) = 0 + y\big(-\sin(xy)\big)\,\frac{\partial}{\partial x}(xy)\\
&= -y^2\sin(xy)\\
\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\big(y\cos(xy)\big) = \frac{\partial}{\partial y}(y)\cos(xy) + y\,\frac{\partial}{\partial y}\big(\cos(xy)\big) = \cos(xy) + y\big(-\sin(xy)\big)\,\frac{\partial}{\partial y}(xy)\\
&= \cos(xy) - xy\sin(xy)
\end{aligned}$$
Comme $g(a,b) = g(b,a)$, nous trouvons par symétrie,
$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y) &= \cos(xy) - xy\sin(xy)\\
\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) &= -x^2\sin(xy)
\end{aligned}$$

Les exemples suggèrent $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$.

Question. Est-ce toujours le cas ?

Réponse. En général, non (voir par exemple l'exercice 2 de la série 8).

Théorème. Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et $(x_0, y_0) \in D(f)$.

Si l'on suppose que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ existent et sont continues dans un voisinage de (x_0, y_0), alors
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0).$$

3.5. Fonctions différentiables (ou dérivables)

Rappel. Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable et soit $x_0 \in D(f)$ tel que f est définie dans un voisinage de x_0.

On dit que f est dérivable en x_0 si la limite $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et on note

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

la dérivée de f en x_0.

But : Généraliser cette notion aux fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pour $n \geqslant 2$.

Remarque.

Nous avons montré que les dérivées partielles de la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

existent pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et qu'en particulier elles existent en $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

D'autre part, comme

$$f(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} f(x,x) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0).$$

la fonction f *n'est pas* continue en $(0,0)$.

Par conséquent, l'existence des dérivées partielles d'une fonction de deux variables en un point (x_0,y_0) *ne suffit pas* pour garantir la continuité de la fonction au point (x_0,y_0), contrairement au cas des fonctions d'une variable où nous avons le résultat

« Si la dérivée de f existe en $x_0 \in D(f)$, alors f est continue en x_0 ».

La dérivabilité d'une fonction de plusieurs variables ne se résume donc pas à l'existence des dérivées partielles de la fonction !

Rappel. Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable et soit $x_0 \in D(f)$ tel que f est définie dans un voisinage de x_0.
Si la fonction f est dérivable en x_0, alors le graphe de f possède une droite tangente au point $x = x_0$ de pente $f'(x_0)$ et d'équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

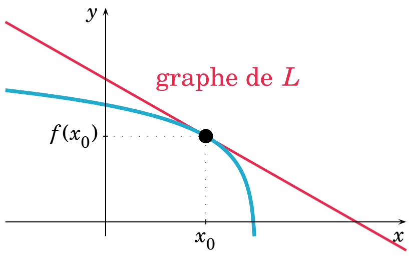
De plus, si l'on définit la fonction

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

appelée l'*approximation linéaire de la fonction f autour du point $x = x_0$*, alors

$$\begin{cases} L(x_0) = f(x_0) \\ L'(x_0) = f'(x_0) \end{cases}$$

et pour des valeurs de x proches de x_0 nous avons $f(x) \approx L(x)$.



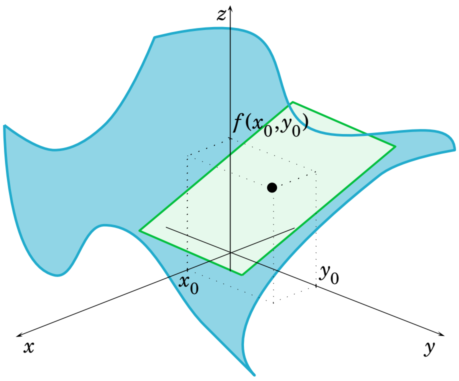
Rappel. Si $f : D(f) \to \mathbb{R}$ est une fonction d'une variable, alors nous avons

$$\begin{aligned}
f \text{ est } \textit{dérivable} \text{ en } x_0 \quad &\Longleftrightarrow \quad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&\Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \right) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - \big(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\big)}{x - x_0} \right) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - L(x)}{x - x_0} = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad f \text{ est } \textit{différentiable} \text{ en } x_0
\end{aligned}$$

Remarque. Pour avoir $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - L(x)}{x - x_0} = 0$, il faut que $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \big(f(x) - L(x)\big) = 0$. De plus, il faut que l'écart $f(x) - L(x)$ aille vers zéro plus vite que $x - x_0$, ce qui nous permet de dire que « $L(x)$ est une bonne approximation de $f(x)$ pour des valeurs de x proches de x_0 ».

Considérons maintenant une fonction f de deux variables et un point $(x_0, y_0) \in D(f)$.

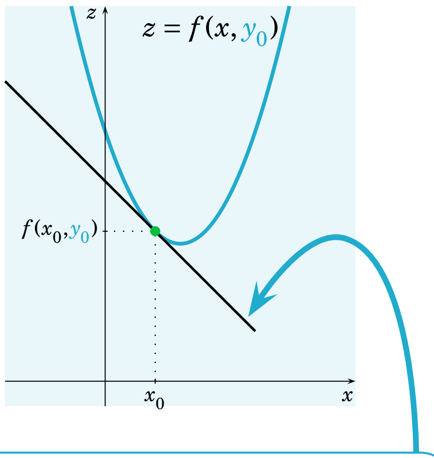
Question. Est-ce que le graphe de la fonction f au point $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big) \in \mathbb{R}^3$ admet un plan tangent et si oui, quelle est son équation ?



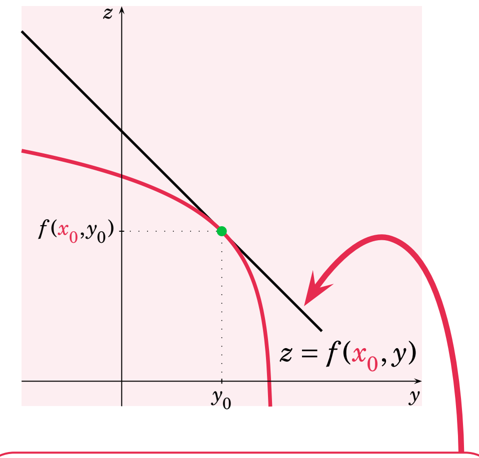
Rappel. L'équation du plan passant par le point (x_0, y_0, z_0) normal au vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0\,.$$

Coupe du graphe de f par le plan $y = y_0$:



Coupe du graphe de f par le plan $x = x_0$:



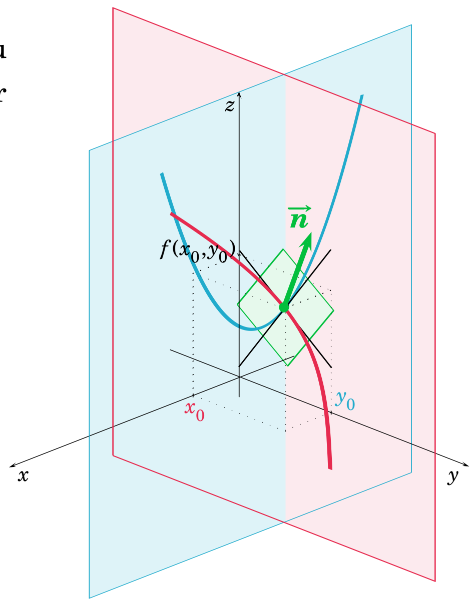
droite tangente de pente $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$

et vecteur directeur $\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$

droite tangente de pente $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

et vecteur directeur $\vec{d}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$

Comme nous cherchons un plan qui soit tangent au graphe de f au point $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big) \in \mathbb{R}^3$, le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ doit être orthogonal aux vecteurs $\vec{d}_1$ et $\vec{d}_2$:



$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{d}_1 = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{d}_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + c\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ b + c\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

En prenant $c = 1$ nous trouvons

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ -\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + 1\big(z - f(x_0, y_0)\big) = 0$$

ou encore

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

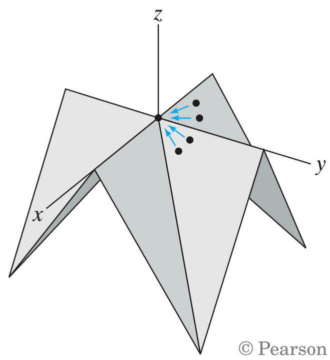
Question. Est-ce que le plan d'équation

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

est forcément le plan tangent au graphe de la fonction f au point $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big) \in \mathbb{R}^3$?

Réponse. Non. Considérons par exemple la fonction

$$f(x, y) = \big||x| - |y|\big| - |x| - |y|.$$



Le calcul des dérivées partielles au point $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

nous donne l'équation du plan

$$z = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y - 0) \quad \Longrightarrow \quad z = 0$$

Ce plan n'est clairement pas tangent au graphe de f. En effet, si l'on coupe le graphe de f par le plan vertical $y = x$ nous obtenons la fonction d'une variable

$$g(x) = f(x, x) = \big||x| - |x|\big| - |x| - |x| = -2|x|$$

qui n'est pas dérivable en $x = 0$ et de ce fait, n'a pas de droite tangente en $x = 0$.

Définition. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

On dit que f est *différentiable en* $(x_0, y_0) \in U$ (ou *dérivable en* $(x_0, y_0) \in U$) si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existent et si la fonction $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

est une «bonne approximation de $f(x, y)$ pour des valeurs de (x, y) proches de (x_0, y_0)» dans le sens suivant :

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - L(x, y)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0.$$

Si la fonction f est différentiable en (x_0, y_0), alors le plan d'équation

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

est le plan tangent au graphe de f au point $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big) \in \mathbb{R}^3$ et la fonction L est appelée *approximation linéaire de f autour du point (x_0, y_0)*.

On dit que f est *différentiable* si elle différentiable en tout point de son domaine.

Exemple

La fonction $f(x, y) = 1 - x^2 - 2y^2$ est telle que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2x$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -4y$.

Par conséquent, $f(0,0) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ et $L(x, y) = 1$. Comme

$$\frac{f(x, y) - L(x, y)}{\|(x, y) - (0,0)\|} = \frac{-x^2 - 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{et} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) - L(x, y)}{\|(x, y) - (0,0)\|} = 0,$$

nous pouvons conclure que f est différentiable en $(0,0)$.

Remarque. Si f est différentiable en (x_0, y_0), alors la fonction

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

est telle que

$$\begin{cases} L(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) \\ \frac{\partial L}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{cases}$$

et pour des valeurs de (x, y) proches de (x_0, y_0) nous avons $f(x, y) \approx L(x, y)$.

Nous avons deux résultats très importants (donnés ici sans démonstration) :

Théorème 1. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

Si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent dans un voisinage de $(x_0, y_0) \in U$ et sont *continues en* (x_0, y_0), alors f est différentiable en (x_0, y_0).

Autrement dit, si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \qquad \text{et} \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

alors

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - L(x,y)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0.$$

Théorème 2. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

Si f est différentiable en $(x_0, y_0) \in U$, alors f est continue en (x_0, y_0).

Conséquence :

Si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent dans un voisinage de $(x_0, y_0) \in U$ et sont *continues en* (x_0, y_0), alors f est continue en (x_0, y_0).

Remarque. Une formulation équivalente du théorème 2 est :

Si f *n'est pas* continue en (x_0, y_0), alors f *n'est pas* différentiable en (x_0, y_0).

Cette formulation est très utile pour déterminer si une fonction n'est pas différentiable en un point.

Exemple

Nous avons vu que la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

n'est pas continue en $(0,0)$, ce qui implique qu'elle *n'est pas* différentiable en $(0,0)$, même si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent sur $\mathbb{R}^2$.

Comme f *n'est pas* différentiable en $(0,0)$, le théorème 1 nous permet de conclure que dans ce cas, les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ *ne sont pas* continues en $(0,0)$.

Attention : Si f est continue en (x_0, y_0), alors on ne peut rien conclure au sujet de la différentiabilité de f en (x_0, y_0).

Définition. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

On dit que f est de *classe* $C^0(U)$, noté $f \in C^0(U)$, si f est continue sur U.

On dit que f est de *classe* $C^1(U)$, noté $f \in C^1(U)$, si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur U.

Les théorèmes 1 et 2 impliquent :

$$f \in C^1(U) \quad \Longrightarrow \quad f \text{ différentiable sur } U \quad \Longrightarrow \quad f \text{ continue sur } U$$

Par contre, nous avons

$$f \in C^1(U) \quad \not\Longleftarrow \quad f \text{ différentiable sur } U \quad \not\Longleftarrow \quad f \text{ continue sur } U$$

Définition. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

On dit que f est de *classe* $C^2(U)$, noté $f \in C^2(U)$, si les quatre dérivées partielles d'ordre 2 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ existent et sont continues sur U.

Proposition. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

Si f est une fonction de classe $C^2(U)$, alors f est une fonction de classe $C^1(U)$.

Preuve. Soit $(x_0, y_0) \in U$. Si f est une fonction de classe $C^2(U)$, alors les dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

existent dans un voisinage de $(x_0, y_0) \in U$ et sont continues en (x_0, y_0). Les théorèmes 1 et 2 impliquent que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en (x_0, y_0). D'autre part, les dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

existent dans un voisinage de $(x_0, y_0) \in U$ et sont continues en (x_0, y_0). Les théorèmes 1 et 2 impliquent que $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue en (x_0, y_0), d'où le résultat. ■

Définition. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

On dit que f est de *classe $C^3(U)$*, noté $f \in C^3(U)$, si les huit dérivées partielles d'ordre 3 $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$ et $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$ existent et sont continues sur U.

On dit que f est de *classe $C^k(U)$*, noté $f \in C^k(U)$, si les 2^k dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur U.

On dit que f est de *classe $C^\infty(U)$*, noté $f \in C^\infty(U)$, si f est de classe $C^k(U)$ pour tout k.

Nous avons les implications suivantes :

$$f \in C^\infty(U) \implies \cdots \implies f \in C^3(U) \implies f \in C^2(U) \implies f \in C^1(U)$$

Par contre, nous avons

$$f \in C^\infty(U) \not\Longleftarrow \cdots \not\Longleftarrow f \in C^3(U) \not\Longleftarrow f \in C^2(U) \not\Longleftarrow f \in C^1(U)$$

Application : *Calcul d'incertitude*

Si nous mesurons des quantités x et y avec une certaine incertitude :

$$x = x_0 \pm \Delta x \qquad \text{(c'est-à-dire } x \in [x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x])$$
$$y = y_0 \pm \Delta y \qquad \text{(c'est-à-dire } y \in [y_0 - \Delta y, y_0 + \Delta y])$$

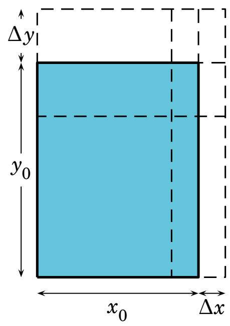
alors, en première approximation, nous pouvons remplacer la valeur de $f(x,y)$ par

$$f(x_0, y_0) \pm \Delta f\,,$$

où l'*erreur* Δf est donnée par

$$\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right| \Delta y\,.$$

Exemple



L'aire d'un rectangle de côtés x et y est donnée par $f(x,y) = xy$.

Comme $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x$, l'erreur sur l'aire est donc

$$\Delta f = |y_0|\Delta x + |x_0|\Delta y\,.$$

Si les valeurs mesurées sont $x = 3 \pm 0.01$ et $y = 4 \pm 0.02$, nous trouvons

$$\Delta f = 4 \cdot 0.01 + 3 \cdot 0.02 = 0.1$$

et en première approximation l'aire est égale à 12 ± 0.1.

Nous avons des définitions analogues dans le cas des fonctions de plus de deux variables :

Définition. Soit $U \subset \mathbb{R}^3$ un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^3$.
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de trois variables.
On dit que la fonction f est *différentiable en* $(x_0, y_0, z_0) \in U$ (ou *dérivable en* $(x_0, y_0, z_0) \in U$) si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$ existent et si la fonction $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$L(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0).$$

est une « bonne approximation de $f(x, y, z)$ pour des valeurs de (x, y, z) proches de (x_0, y_0, z_0)» dans le sens suivant :

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} \frac{f(x, y, z) - L(x, y, z)}{\|(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)\|} = 0.$$

Si f est différentiable en (x_0, y_0), alors la fonction L est appelée *approximation linéaire de f autour du point (x_0, y_0, z_0)*.

On dit que f est *différentiable* si elle différentiable en tout point de son domaine.

Définition. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de n variables.
On dit que f est *différentiable en* $\vec{x}_0 \in U$ (ou *dérivable en* $\vec{x}_0 \in U$) si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0)$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0)$ existent et si la fonction $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned} L(\vec{x}) &= f(\vec{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0)(x_1 - x_{0,1}) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0)(x_n - x_{0,n}) \\ &= f(\vec{x}_0) + \left(\vec{\nabla} f(\vec{x}_0)\right) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0). \end{aligned}$$

est une « bonne approximation de $f(\vec{x})$ pour des valeurs de $\vec{x}$ proches de $\vec{x}_0$ » dans le sens suivant :

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \frac{f(\vec{x}) - L(\vec{x})}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0.$$

Si f est différentiable en $\vec{x}$, alors la fonction L est appelée *approximation linéaire de f autour du point $\vec{x}_0$*.

On dit que f est *différentiable* si elle différentiable en tout point de son domaine.

3.6. La règle généralisée de dérivation d'une composition

Rappel. Si $f : D(f) \to \mathbb{R}$ et $g : D(g) \to \mathbb{R}$ sont des fonctions dérivables d'une variable telles que $\text{Im}(g) \subset D(f)$, alors la fonction composée $h = f \circ g$, définie par

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

est dérivable et nous avons

$$h'(x) = (f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

But : Obtenir une formule analogue dans le cas des fonctions de plusieurs variables.

- Si g est une fonction de n variables, pour pouvoir faire la composition il faut que f soit une fonction d'une variable et dans ce cas, $h = f \circ g$ est une fonction de n variables :

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

- Si f est une fonction de n variables, pour pouvoir faire la composition il faut que l'image de g se trouve dans $\mathbb{R}^n$ et dans ce cas, $h = f \circ g$ est une fonction d'une variable :

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

  En particulier, si f est une fonction de deux variables, pour pouvoir faire la composition il faut que l'image de g se trouve dans $\mathbb{R}^2$ et dans ce cas, $h = f \circ g$ est une fonction d'une variable :

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

Composition de fonctions

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $\vec{g} : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

La fonction $h = f \circ \vec{g} : I \to \mathbb{R}$ est une fonction d'une variable donnée par

$$h(t) = (f \circ \vec{g})(t) = f\big(\vec{g}(t)\big)$$

Si $\vec{g}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ alors

$$h(t) = f\big(x(t), y(t)\big), \qquad \text{pour } t \in I$$

Théorème. Si la courbe paramétrée $\vec{g} : I \to \mathbb{R}^2$ est dérivable et la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est diffférentiable, alors la fonction $h : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et nous avons

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)y'(t)$$

Notation abrégée :

$$h' = \frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y'$$

Notation vectorielle :

$$(f \circ \vec{g})'(t) = \underbrace{\vec{\nabla} f\big(\vec{g}(t)\big)}_{\substack{\text{gradient de } f \\ \text{au point } \vec{g}(t)}} \cdot \underbrace{\vec{g}\,'(t)}_{\substack{\text{vecteur tangent} \\ \text{au point } \vec{g}(t)}} = \vec{g}\,'(t) \cdot \vec{\nabla} f\big(\vec{g}(t)\big)$$

Conséquence

Si x et y sont des fonctions différentiables de deux variables :

$$x : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & x(u,v) \end{array} \qquad \text{et} \qquad y : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & y(u,v) \end{array}$$

alors la fonction de deux variables

$$h(u,v) = f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$$

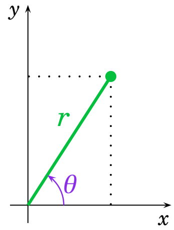
a comme dérivées partielles

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$
$$\frac{\partial h}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Notation matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial u} \\[2mm] \dfrac{\partial h}{\partial v} \end{pmatrix}}_{\text{gradient de } h} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\[2mm] \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}}_{\text{gradient de } f}$$

Exemple important : coordonnées polaires



$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases} \qquad \text{avec } r \geqslant 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R}$$

Comme nous avons

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos(\theta), \qquad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin(\theta),$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin(\theta), \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos(\theta),$$

la fonction

$$h(r,\theta) = f\big(x(r,\theta), y(r,\theta)\big)$$

a comme dérivées partielles

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial r} \\ \frac{\partial h}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Application

Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable de deux variables.

Soit $L(c)$ la courbe de niveau c de f :

$$L(c) = \{(x,y) \in D(f) : f(x,y) = c\}.$$

Soit $(x_0, y_0) \in L(c)$.

Soit $\vec{g} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ une paramétrisation de $L(c)$ autour de (x_0,y_0) telle que $\vec{g}(t_0) = (x_0,y_0)$, avec $t_0 \in]a,b[$.

Supposons que la courbe paramétrée $\vec{g}$ est de classe C^1 et régulière en t_0 $(\vec{g}\,'(t_0) \neq \vec{0})$

Par construction,

$$(f \circ \vec{g})(t) = c, \qquad \text{pour tout } t \in [a,b]$$

En dérivant on obtient

$$(f \circ \vec{g})'(t) = c' = 0, \qquad \text{pour tout } t \in]a,b[$$

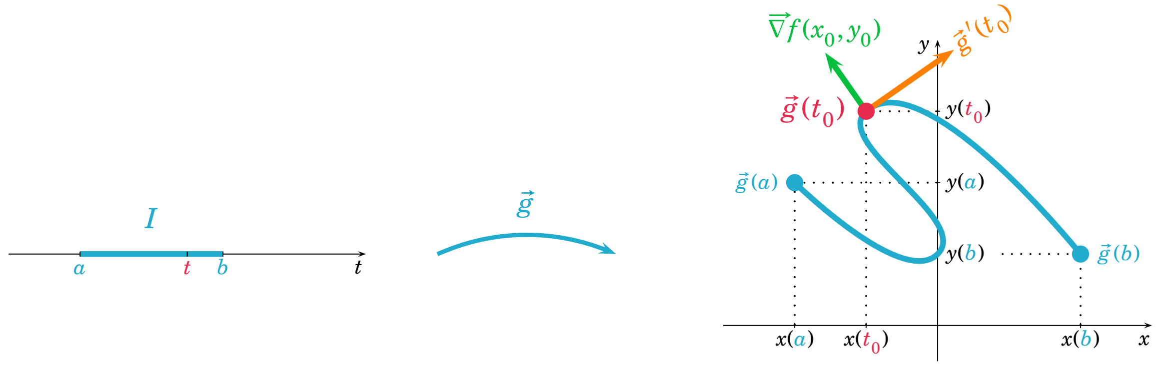
d'où

$$\vec{g}\,'(t) \cdot \vec{\nabla} f\big(\vec{g}(t)\big) = 0$$

En prenant $t = t_0$ on trouve

$$\vec{g}\,'(t_0) \cdot \vec{\nabla} f(x_0,y_0) = 0$$

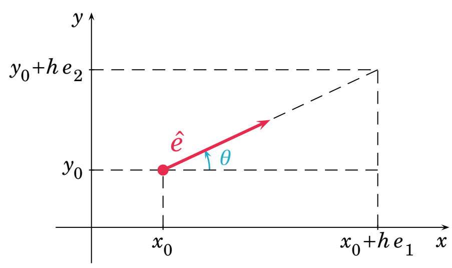
Autrement dit, si nous supposons que la courbe paramétrée $\vec{g}$ est régulière en t_0 et que la fonction f est différentiable en (x_0, y_0), alors le vecteur tangent $\vec{g}'(t_0)$ ne s'annule pas et le vecteur $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ existe et est orthogonal à la courbe de niveau de f qui passe par le point (x_0, y_0).



3.7. La dérivée directionnelle et le gradient

Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble ouvert. Soit $(x_0, y_0) \in U$ et soit $\hat{e} = (e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2$ un vecteur unitaire (c'est-à-dire, $\|\hat{e}\| = \sqrt{e_1^2 + e_2^2} = 1$).
Nous avons vu que la droite du plan qui passe par le point (x_0, y_0) ayant $\hat{e}$ comme vecteur directeur peut être paramétrée par

$$\vec{\varphi}(t) = (x_0 + t e_1, y_0 + t e_2), \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$



Définition. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et soit

$$g(t) = f\big(\vec{\varphi}(t)\big) = (f \circ \vec{\varphi})(t).$$

Si g est dérivable en $t = 0$ alors on dit que f est *dérivable au point (x_0, y_0) dans la direction du vecteur $\hat{e}$*. Dans ce cas, la *dérivée directionnelle de f au point (x_0, y_0) dans la direction du vecteur $\hat{e}$*, notée $D_{\hat{e}} f(x_0, y_0)$ est donnée par

$$D_{\hat{e}} f(x_0, y_0) = g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h e_1, y_0 + h e_2) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Remarques.

- Le point $(x_0+h\,e_1, y_0+h\,e_2)$ se trouve à une distance h du point (x_0,y_0).
- Si $\hat{e}=(\cos\theta,\sin\theta)$, nous parlons de dérivée de f dans la direction donnée par l'angle θ.
- Si $\hat{e}=(1,0)$ alors $\quad D_{\hat{e}}f(x_0,y_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$.
- Si $\hat{e}=(0,1)$ alors $\quad D_{\hat{e}}f(x_0,y_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.
- Le nombre $D_{\hat{e}}f(x_0,y_0)=g'(0)$ est la pente de la droite tangente à la courbe obtenue en intersectant le graphe de f au point (x_0,y_0) avec le plan vertical passant par (x_0,y_0) qui contient le vecteur $\hat{e}$.
- Cette définition se généralise naturellement au cas de n variables.
- Si $\vec{e}\in\mathbb{R}^2$ est un vecteur non-nul quelconque tel que $\|\vec{e}\|\neq 1$, alors la définition de *dérivée de f au point (x_0,y_0) dans la direction du vecteur $\vec{e}$* varie selon les auteurs. Nous allons donc restreindre la discussion au cas des vecteurs unitaires.

Exemple

Calculer la dérivée directionnelle de la fonction

$$f(x,y)=6x^2-5xy+4x-3y$$

au point $(0,0)$ dans la direction du vecteur $\hat{e}=(e_1,e_2)$.

Par définition,

$$\begin{aligned}D_{\hat{e}}f(0,0)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(h\,e_1,h\,e_2)-f(0,0)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{6h^2e_1^2-5h^2e_1e_2+4he_1-3he_2}{h}\\&=\lim_{h\to 0}(6he_1^2-5he_1e_2+4e_1-3e_2)\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$D_{\hat{e}}f(0,0)=4e_1-3e_2\,.$$

Remarque.

La dérivée directionnelle de la fonction $f(x,y)=6x^2-5xy+4x-3y$ au point $(0,0)$ est nulle dans toutes les directions $\hat{e}=(e_1,e_2)$ telles que $4e_1-3e_2=0$. Autrement dit,

$$\hat{e}=\pm\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right).$$

Question. Est-ce qu'il est possible de calculer la dérivée directionnelle de f autrement qu'en calculant une limite ?

Réponse : Oui, si l'on suppose par exemple que f est différentiable en (x_0, y_0).

En effet, comme $\vec{\varphi}(t) = (x_0 + t e_1, y_0 + t e_2)$ est une courbe paramétrée régulière telle que le vecteur tangent est $\vec{\varphi}\,'(t) = (e_1, e_2) = \hat{e}$, si la fonction f est différentiable en (x_0, y_0) alors la composition $g(t) = f\big(\vec{\varphi}(t)\big) = (f \circ \vec{\varphi})(t)$ est une fonction dérivable en $t = 0$ et nous avons

$$g'(0) = (f \circ \vec{\varphi})'(0) = \vec{\varphi}\,'(0) \cdot \vec{\nabla} f\big(\vec{\varphi}(0)\big) = \hat{e} \cdot \vec{\nabla} f(x_0, y_0).$$

Nous avons donc le résultat suivant :

Théorème. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble ouvert. Si $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable en $(x_0, y_0) \in U$, alors la dérivée directionnelle de f au point (x_0, y_0) dans la direction du vecteur $\hat{e}$ existe *pour tout choix de $\hat{e}$*. De plus, dans ce cas nous avons

$$D_{\hat{e}} f(x_0, y_0) = \hat{e} \cdot \vec{\nabla} f(x_0, y_0).$$

Conséquence.

Si f est différentiable en $(x_0, y_0) \in U$, alors le gradient de f au point (x_0, y_0) détermine complètement les dérivées directionnelles de f dans *toutes les directions* à l'aide de la formule $D_{\hat{e}} f(x_0, y_0) = \hat{e} \cdot \vec{\nabla} f(x_0, y_0)$.

Exemple

Considérons à nouveau la fonction

$$f(x, y) = 6x^2 - 5xy + 4x - 3y.$$

Comme f est une fonction de classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ et donc différentiable, nous pouvons utiliser le théorème précédent pour calculer $D_{\hat{e}} f(0, 0)$.

Comme

$$\vec{\nabla} f(x, y) = (12x - 5y + 4,\ -5x - 3),$$

nous avons $\vec{\nabla} f(0, 0) = (4, -3)$, d'où

$$D_{\hat{e}} f(0, 0) = \hat{e} \cdot \vec{\nabla} f(0, 0) = (e_1, e_2) \cdot (4, -3) = 4e_1 - 3e_2$$

et nous retrouvons le résultat obtenu avant.

Attention : Une fonction qui possède des dérivées directionnelles au point (x_0, y_0) dans toutes les directions $\hat{e}$, peut ne pas être différentiable en (x_0, y_0).

Considérons par exemple la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Nous avons montré que la limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

n'existe pas. Par conséquent, la fonction f *n'est pas* continue en $(0,0)$, ce qui implique que f *n'est pas* différentiable en $(0,0)$, même si les dérivées partielles existent en $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Comme $\vec{\nabla} f(0,0) = (0,0)$, nous avons ici

$$\hat{e} \cdot \vec{\nabla} f(0,0) = 0, \qquad \text{pour toute direction } \hat{e} = (e_1, e_2).$$

Par définition,

$$D_{\hat{e}} f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(he_1, he_2) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[\frac{(he_1)^2 (he_2)}{(he_1)^4 + (he_2)^2} - 0 \right]$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^3 (e_1)^2 e_2}{h^3 \left(h^2 (e_1)^4 + (e_2)^2\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{(e_1)^2 e_2}{h^2 (e_1)^4 + (e_2)^2}$$

Nous distinguons deux cas :

- Si $e_2 = 0$, alors $$D_{\hat{e}} f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^2 (e_1)^4} = 0$$
- Si $e_2 \neq 0$, alors $$D_{\hat{e}} f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{(e_1)^2 e_2}{h^2 (e_1)^4 + (e_2)^2} = \frac{(e_1)^2 e_2}{(e_2)^2} = \frac{(e_1)^2}{e_2}$$

Ceci montre que les dérivées directionnelles de f au point $(0,0)$ existent dans toutes les directions $\hat{e}$. De plus,

$$D_{\hat{e}} f(0,0) \neq 0, \qquad \text{pour toute direction } \hat{e} = (e_1, e_2) \text{ avec } e_2 \neq 0 \text{ et } e_1 \neq 0.$$

Par conséquent,

$$D_{\hat{e}} f(0,0) \neq \hat{e} \cdot \vec{\nabla} f(0,0)$$

pour toute direction $\hat{e} = (e_1, e_2)$ avec $e_2 \neq 0$ et $e_1 \neq 0$.

Interprétation géométrique

Rappel : Nous avons $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\alpha)$, où α l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Soit f une fonction différentiable en (x_0, y_0).

- Soit (x_0, y_0) tel que $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = (0,0)$.

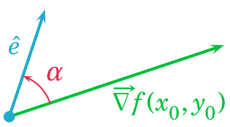
  Dans ce cas nous avons :

  $$D_{\hat{e}} f(x_0, y_0) = \hat{e}\cdot\vec{\nabla} f(x_0, y_0) \qquad \Longrightarrow \qquad D_{\hat{e}} f(x_0, y_0) = 0 \qquad \text{pour toute direction } \hat{e}.$$

- Soit (x_0, y_0) tel que $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) \neq (0,0)$.

  Dans ce cas nous avons :

  $$D_{\hat{e}} f(x_0, y_0) = \hat{e}\cdot\vec{\nabla} f(x_0, y_0) \qquad \Longrightarrow \qquad D_{\hat{e}} f(x_0, y_0) = \left\|\vec{\nabla} f(x_0, y_0)\right\| \cos(\alpha)$$



  Comme $-1 \leqslant \cos(\alpha) \leqslant 1$ alors

  $$-\left\|\vec{\nabla} f(x_0, y_0)\right\| \leqslant D_{\hat{e}} f(x_0, y_0) \leqslant \left\|\vec{\nabla} f(x_0, y_0)\right\|$$

  - Si $\alpha = 0$, alors $D_{\hat{e}} f(x_0, y_0) = \left\|\vec{\nabla} f(x_0, y_0)\right\|$ est maximale.
  - Si $\alpha = \pi$, alors $D_{\hat{e}} f(x_0, y_0) = -\left\|\vec{\nabla} f(x_0, y_0)\right\|$ est minimale.
  - Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, alors $D_{\hat{e}} f(x_0, y_0) = 0$.
  - Si $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$, alors $D_{\hat{e}} f(x_0, y_0) > 0$ et la fonction est croissante dans la direction $\hat{e}$.
  - Si $\frac{\pi}{2} < \alpha \leqslant \pi$, alors $D_{\hat{e}} f(x_0, y_0) < 0$ et la fonction est décroissante dans la direction $\hat{e}$.

  Ainsi, la croissance de la fonction est maximale dans la direction du gradient et minimale dans la direction opposée.

Exemples

1. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

Le calcul nous donne

$$\vec{\nabla} f(x,y)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

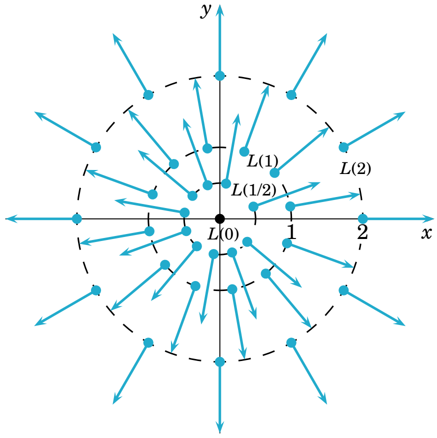
avec $(x,y)\neq(0,0)$.

Ainsi, la croissance de f à partir de $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ se fait dans la direction radiale.

De plus, comme

$$\|\vec{\nabla} f(x,y)\|=1 \qquad \text{pour tout } (x,y)\neq(0,0),$$

la croissance ne dépend pas de la position du point.



Courbes de niveau et gradients pour f

2. $g(x,y)=x^2+y^2$

Le calcul nous donne

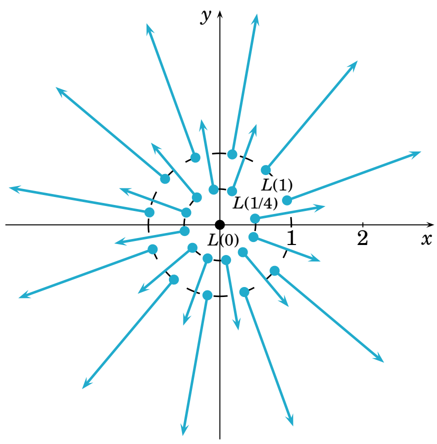
$$\vec{\nabla} g(x,y)=(2x,2y) \qquad \text{pour tout } (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Ainsi, la croissance de g à partir de $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ se fait dans la direction radiale.

De plus, comme

$$\|\vec{\nabla} g(x,y)\|=2\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{g(x,y)},$$

cette croissance est proportionnelle à la distance à l'origine.



Courbes de niveau et gradients pour g

3. $h(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Le calcul nous donne

$$\vec{\nabla} h(x,y) = \left(-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right),$$

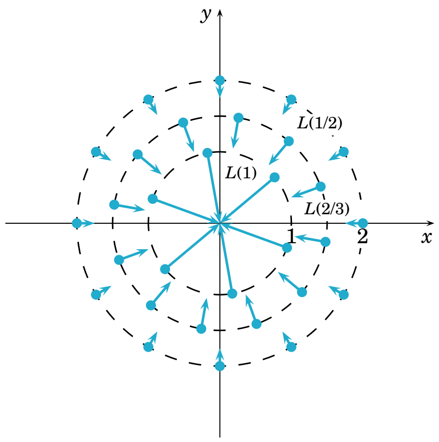
avec $(x,y) \neq (0,0)$.

Ainsi, la croissance de h à partir de $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ se fait dans la direction de l'origine.

De plus, comme

$$\|\vec{\nabla} h(x,y)\| = \frac{1}{x^2+y^2} = \big(h(x,y)\big)^2,$$

cette croissance est inversément proportionnelle à la distance à l'origine.



Courbes de niveau et gradients pour h

3.8. Points d'extremum local (ou relatif)

Rappel : Points d'extremum local d'une fonction d'une variable

Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable et soit $x_0 \in D(f)$.

- On dit que x_0 est un *point de maximum local de f* si
$$f(x_0) \geqslant f(x) \qquad \text{pour tout } x \text{ dans un voisinage de } x_0.$$
On dit que $f(x_0)$ est un *maximum local de f*.
- On dit que x_0 est un *point de minimum local de f* si
$$f(x_0) \leqslant f(x) \qquad \text{pour tout } x \text{ dans un voisinage de } x_0.$$
On dit que $f(x_0)$ est un *minimum local de f*.
- On dit que x_0 est un *point d'extremum local de f* s'il est un point de minimum local ou un point de maximum local.
- On dit que x_0 est un *point stationnaire de f* si $f'(x_0) = 0$.

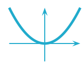
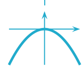
Théorème (Fermat). Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable et soit $x_0 \in D(f)$.
Si x_0 est un point d'extremum local de f tel que $f'(x_0)$ existe, alors $f'(x_0) = 0$.

Conséquence : Si $f : D(f) \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable, alors les points d'extremum local de f sont donc à chercher parmi les points stationnaires de f.

Attention : Si $f : D(f) \to \mathbb{R}$ est une fonction d'une variable dérivable en $x_0 \in D(f)$, le fait que $f'(x_0) = 0$ ne garantit pas que x_0 soit un point d'extremum local de f.
Par exemple, la fonction $f(x) = x^3$ est telle que $f'(0) = 0$ mais dans ce cas, x_0 n'est pas un point d'extremum local de f, mais un point d'inflexion de f.

Test de la dérivée seconde

Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable et soit $x_0 \in D(f)$ tel que $f'(x_0) = 0$. Supposons de plus que f est deux fois continûment dérivable sur un intervalle ouvert contenant x_0.

1. Si $f''(x_0) > 0$, alors x_0 est un point de minimum local de f. 
2. Si $f''(x_0) < 0$, alors x_0 est un point de maximum local de f. 

Points d'extremum local d'une fonction de deux variables

Définition. Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

- Un point $(x_0, y_0) \in D(f)$ est un *point de maximum local de f* si
$$f(x_0, y_0) \geqslant f(x, y) \qquad \text{pour tout } (x, y) \text{ dans un voisinage de } (x_0, y_0).$$
On dit que $f(x_0, y_0)$ est un *maximum local de f*.

- Un point $(x_0, y_0) \in D(f)$ est un *point de maximum local strict de f* si
$$f(x_0, y_0) > f(x, y) \qquad \text{pour tout } (x, y) \text{ dans un voisinage de } (x_0, y_0).$$
On dit que $f(x_0, y_0)$ est un *maximum local strict de f*.

- Un point $(x_0, y_0) \in D(f)$ est un *point de minimum local de f* si
$$f(x_0, y_0) \leqslant f(x, y) \qquad \text{pour tout } (x, y) \text{ dans un voisinage de } (x_0, y_0).$$
On dit que $f(x_0, y_0)$ est un *minimum local de f*.

- Un point $(x_0, y_0) \in D(f)$ est un *point de minimum local strict de f* si
$$f(x_0, y_0) < f(x, y) \qquad \text{pour tout } (x, y) \text{ dans un voisinage de } (x_0, y_0).$$
On dit que $f(x_0, y_0)$ est un *minimum local strict de f*.

- Un point $(x_0, y_0) \in D(f)$ est un *point d'extremum local de f* s'il est un point de minimum local ou un point de maximum local.

Détermination des points d'extremum local

Définition. Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. On dit que (x_0, y_0) est un *point stationnaire de* f si la fonction f est différentiable en $(x_0, y_0) \in D(f)$ et si

$$\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = (0,0).$$

Dans ce cas, le plan tangent au graphe de f au point $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$ est horizontal :

$$z = f(x_0, y_0).$$

Théorème 1. Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables différentiable en (x_0, y_0). Si (x_0, y_0) est un point d'extremum local de f alors (x_0, y_0) est un point stationnaire de f.

Preuve. Supposons que (x_0, y_0) est un point d'extremum local de la fonction f. Comme par hypothèse f est différentiable en ce point, $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ existe.

A voir : $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = (0,0)$.

Par hypothèse, la fonction $x \longmapsto f(x, y_0)$ possède un extremum local en x_0.

En utilisant le théorème sur les points d'extremum des fonctions d'une variable nous trouvons $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$.

De la même manière, étant donné que $y \longmapsto f(x_0, y)$ possède un extremum local en y_0 nous trouvons $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. ■

Conséquence : Si f est différentiable en (x_0, y_0) et si (x_0, y_0) *n'est pas* un point stationnaire de f, alors (x_0, y_0) *n'est pas* un point d'extremum local de f.

Par conséquent. si f est une fonction différentiable, alors les candidats à point d'extremum local de la fonction f sont à chercher parmi les points stationnaires de f.

Remarque. Le théorème se généralise au cas des fonctions de n variables, avec $n \geqslant 3$.

Exemple

La fonction différentiable $f(x, y) = x^2 + y^2$ est telle que

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \geqslant 0 = f(0,0).$$

Par conséquent, f possède un point de minimum local en $(0,0)$.

Etant donné que le gradient $\vec{\nabla} f(x, y) = (2x, 2y)$ est défini pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et s'annule en $(0,0)$, le point $(0,0)$ est bel et bien un point stationnaire.

Attention : Le théorème 1 *ne dit pas* que si (x_0, y_0) est un point stationnaire de f, alors (x_0, y_0) est forcément un point d'extremum local de f.

Considérons par exemple la fonction différentiable

$$f(x,y) = x^2 - y^2, \qquad \text{avec } D(f) = \mathbb{R}^2.$$

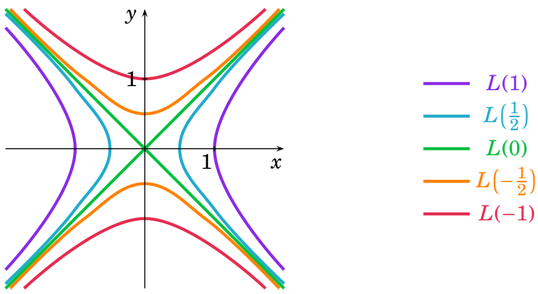
Comme le gradient $\vec{\nabla} f(x,y) = (2x, -2y)$ est défini partout et

$$\vec{\nabla} f(x,y) = (0,0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x,y) = (0,0),$$

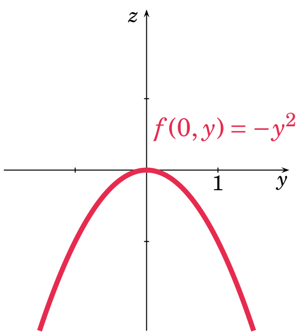
le seul point stationnaire de f est $(0,0)$. Nous pouvons montrer, à l'aide des courbes de niveau de f, que le point $(0,0)$ *n'est pas* un point d'extremum local de f. Nous avons

$$f(x,y) = c \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 - y^2 = c$$

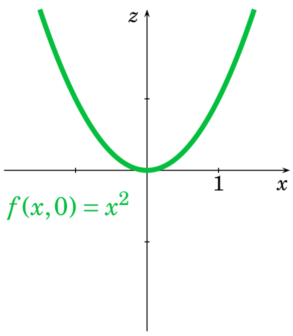
- Si $c = 0$, nous trouvons $y = \pm x$ (ensemble de deux droites).
- Si $c \neq 0$, nous trouvons $\dfrac{x^2}{c} - \dfrac{y^2}{c} = 1$ (hyperbole).



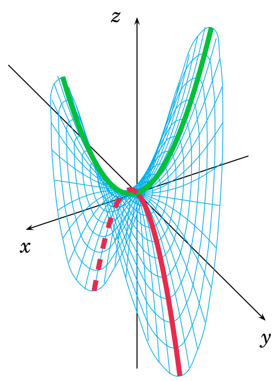
Quelques courbes de niveau de $f(x,y) = x^2 - y^2$



Coupe en $x = 0$



Coupe en $y = 0$



Esquisse du graphe de f

Définition. Soit $(x_0, y_0) \in D(f)$ un point stationnaire de f.
On dit que (x_0, y_0) est un *point selle de f* s'il est possible de trouver deux directions

$$\hat{e} = (e_1, e_2) \quad \text{et} \quad \hat{e}^* = (e_1^*, e_2^*)$$

telles que la fonction $t \longmapsto f(x_0 + te_1, y_0 + te_2)$ admet un point de maximum local en $t = 0$ alors que la fonction $t \longmapsto f(x_0 + te_1^*, y_0 + te_2^*)$ admet un point de minimum local en $t = 0$.

Exemple

Le point $(0,0)$ est un point selle de $f(x,y) = x^2 - y^2$.
En effet, il suffit de prendre $\hat{e} = (0,1)$ et $\hat{e}^* = (1,0)$.

Théorème 2. Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et soit (x_0, y_0) un point stationnaire de f. Supposons que les dérivées partielles de premier et deuxième ordre existent et sont continues au voisinage de (x_0, y_0). Soit

$$\mathcal{H}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right)^2.$$

1) Si $\quad \mathcal{H}(x_0, y_0) > 0 \quad$ et $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0 \quad \left(\text{ou } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) > 0\right)$,
alors le point (x_0, y_0) est un point de minimum local de f.

2) Si $\quad \mathcal{H}(x_0, y_0) > 0 \quad$ et $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0 \quad \left(\text{ou } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) < 0\right)$,
alors le point (x_0, y_0) est un point de maximum local f.

3) Si $\quad \mathcal{H}(x_0, y_0) < 0$,
alors le point (x_0, y_0) est un point selle de f (et *n'est pas* un point d'extremum local).

Remarques.

- Si $\mathcal{H}(x_0, y_0) = 0$, le théorème 2 ne nous permet pas de conclure et il faut étudier la fonction au voisinage du point stationnaire (x_0, y_0).
- Le théorème *ne se généralise pas* au cas des fonctions de n variables, avec $n \geqslant 3$.

Définition. On appelle $\mathcal{H}(x, y)$ le *hessien* de f. C'est le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix},$$

appelée *matrice hessienne* de f.

Méthode pour déterminer les points d'extremum local d'une fonction différentiable de deux variables

a) Dresser la liste des points stationnaires de f

b) Appliquer le théorème 2 pour déterminer la nature des points trouvés sous a).

Exemples

Déterminer les points d'extremum local des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$, avec $D(f) = \mathbb{R}^2$.

Comme $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 12$ sont des fonctions continues définies sur $\mathbb{R}^2$, la fonction f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ et donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Comme

$$\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 3y^2 - 12 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y^2 - 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x-1)(x+1) = 0 \\ (y-2)(y+2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \text{ ou } x = -1 \\ y = 2 \text{ ou } y = -2 \end{cases}$$

nous avons donc quatre points stationnaires :

$$(1,2), \quad (1,-2), \quad (-1,2), \quad (-1,-2).$$

Etant donné que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(x,y) = (6x)(6y) - 0^2 = 36xy,$$

le théorème 2 nous dit que :

- $(1,2)$ est un point de minimum local de f car $\mathcal{H}(1,2) = 36\cdot1\cdot2 > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2) = 6\cdot1 > 0$
- $(1,-2)$ est un point selle de f car $\mathcal{H}(1,-2) = 36\cdot1\cdot(-2) < 0$
- $(-1,2)$ est un point selle de f car $\mathcal{H}(-1,2) = 36\cdot(-1)\cdot2 < 0$
- $(-1,-2)$ est un point de maximum local de f car $\mathcal{H}(-1,-2) = 36(-1)(-2) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-2) = 6(-1) < 0$

2. $g(x,y) = 1 + x^2 + y^2 - 2xy$, avec $D(g) = \mathbb{R}^2$.

Comme $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x - 2y$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2y - 2x$ sont des fonctions continues définies sur $\mathbb{R}^2$, la fonction g est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ et donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Comme

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ 2y - 2x = 0 \end{cases} \iff \quad y = x \quad \text{(droite)}$$

nous avons donc une infinité de points stationnaires :

$$(x,x) \qquad \text{avec } x \in \mathbb{R}.$$

Etant donné que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = 2, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = 2, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = -2 \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(x,y) = 2\cdot2 - (-2)^2 = 0,$$

le théorème 2 ne nous permet pas de conclure.

Comme

$$g(x,y) = 1 + x^2 + y^2 - 2xy = 1 + x^2 - 2xy + y^2 = 1 + (x-y)^2 \geqslant 1 = g(x,x),$$

les points stationnaires de g sont des points de minimum local de g.

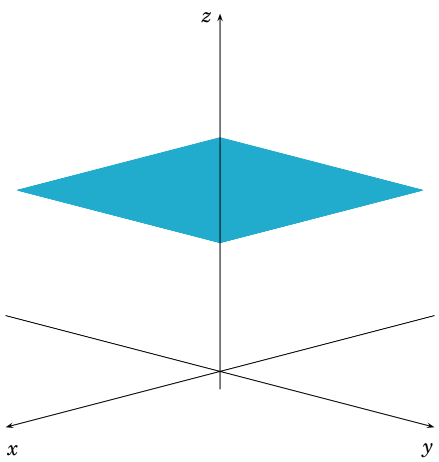
3.9. Points d'extremum global (ou absolu)

Définition. Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

- Un point $(x_0, y_0) \in D(f)$ est un *point de maximum global de f* si
$$f(x_0, y_0) \geqslant f(x, y) \qquad \text{pour tout } (x, y) \in D(f).$$
On dit que $f(x_0, y_0)$ est le *maximum global de f*.
- Un point $(x_0, y_0) \in D(f)$ est un *point de maximum global strict de f* si
$$f(x_0, y_0) > f(x, y) \qquad \text{pour tout } (x, y) \in D(f).$$
On dit que $f(x_0, y_0)$ est le *maximum global strict de f*.
- Un point $(x_0, y_0) \in D(f)$ est un *point de minimum global de f* si
$$f(x_0, y_0) \leqslant f(x, y) \qquad \text{pour tout } (x, y) \in D(f).$$
On dit que $f(x_0, y_0)$ est le *minimum global de f*.
- Un point $(x_0, y_0) \in D(f)$ est un *point de minimum global strict de f* si
$$f(x_0, y_0) < f(x, y) \qquad \text{pour tout } (x, y) \in D(f).$$
On dit que $f(x_0, y_0)$ est le *minimum global strict de f*.
- Un point $(x_0, y_0) \in D(f)$ est un *point d'extremum global de f* s'il est un point de minimum global ou un point de maximum global.

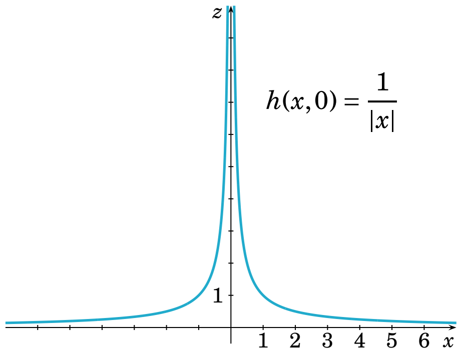
Exemples

1. Tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est un point de maximum global et un point de minimum global de la fonction constante $f(x, y) = c$.

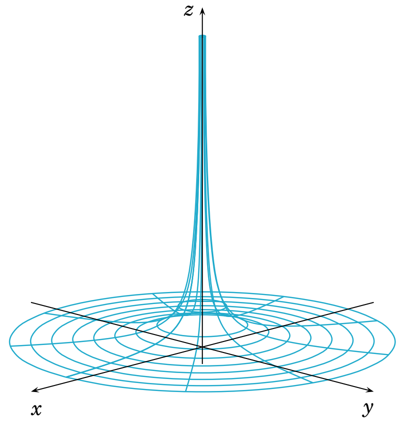


Graphe de f

2. La fonction $h(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ n'a pas de points d'extremum global.



Coupe du graphe de h en $y=0$



Esquisse du graphe de h

Existence de points d'extremum global

Rappel. Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est une *fonction continue* définie sur l'*intervalle fermé* $[a,b]$, alors la fonction f possède (au moins) un point de maximum global et (au moins) un point de minimum global.

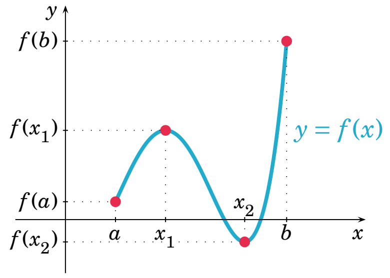
Dans ce cas, les points d'extremum global sont à chercher parmi :

- les points $x_0 \in]a,b[$ où $f'(x_0)=0$,
- les points $x_0 \in]a,b[$ où $f'(x_0)$ n'existe pas,
- les points du bord de l'intervalle, à savoir $x=a$ et $x=b$.

Par exemple, la fonction f esquissée ci-dessous possède deux points stationnaires (x_1 et x_2).

– x_2 est un point de minimum global de f

– b est un point de maximum global de f



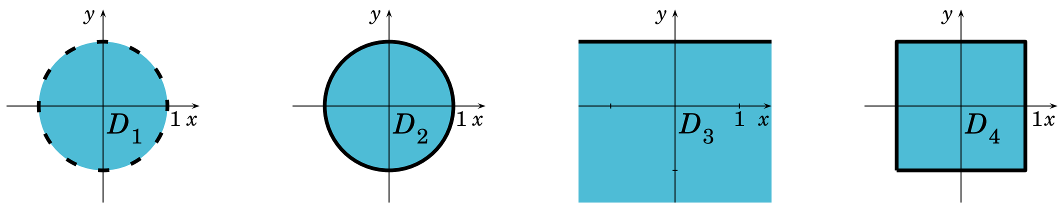
Question. Quel est l'analogue d'intervalle fermé $[a,b] \subset \mathbb{R}$ lorsque nous considérons des domaines de $\mathbb{R}^n$?

Rappel.

- Un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ est *fermé* s'il contient son bord.
- Un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ est *borné* s'il peut être contenu dans une boule de rayon fini centrée à l'origine.
- Un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ est *compact* s'il est fermé et borné.

Exemples

1. $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ est un domaine ouvert et borné.
2. $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ est un domaine fermé et borné.
3. $D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leqslant 1\}$ est un domaine fermé mais non borné.
4. $D_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leqslant x \leqslant 1,\ -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ est un domaine fermé et borné.



Théorème 3. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables avec $D \subset \mathbb{R}^2$ fermé et borné. Si f est continue, alors f possède (au moins) un point de maximum global et (au moins) un point de minimum global.

Conséquence. En faisant appel aux théorèmes 1 et 3, nous pouvons montrer que toute fonction différentiable de deux variables définie sur un domaine D fermé et borné atteint nécessairement son maximum global et son minimum global en

- un point stationnaire,
- un point de ∂D, le bord du domaine D.

Méthode pour déterminer les points d'extremum global d'une fonction différentiable de deux variables sur un domaine D fermé et borné

a) Dresser la liste des points stationnaires de f se trouvant dans D.

b) Déterminer les points sur le bord de D susceptibles de donner un extremum.

c) Evaluer la fonction f en chaque point trouvé dans a) – b)

- la plus grande valeur M est le maximum global de f sur D,
- la plus petite valeur m est le minimum global de f sur D

et nous avons

$$m \leqslant f(x,y) \leqslant M \qquad \text{pour tout } (x,y) \in D.$$

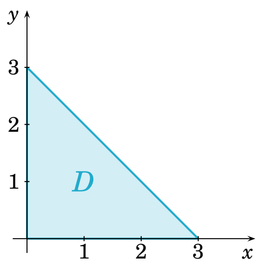
Exemples

Déterminer les points d'extremum global des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - x - y$ restreinte au domaine

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant 3\}$$

(domaine délimité par les droites $x = 0$, $y = 0$ et $y = 3 - x$).



a) *Points stationnaires :*

Comme $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - y - 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x + 2y - 1$ sont des fonctions continues, f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

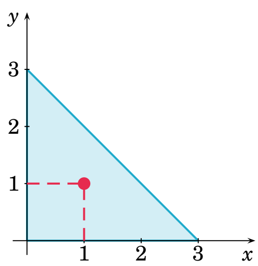
Les points stationnaires de f satisfont

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 & (1) \\ -x + 2y - 1 = 0 & (2) \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - 3 = 0 & 2(1)+(2) \\ 3y - 3 = 0 & (1)+2(2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Nous avons donc un seul point stationnaire :

$$(1,1) \in D.$$



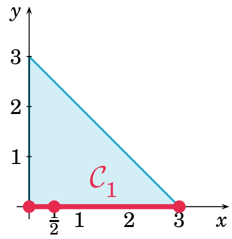
b) *Points du bord :* nous allons regarder les trois côtés du triangle séparément :

$\boxed{\mathcal{C}_1 \, : \, y = 0, \; 0 \leqslant x \leqslant 3}$

Ici $f(x,0) = x^2 - x = g(x)$, avec $x \in [0,3]$.

Comme $g'(x) = 2x - 1$ s'annule en $x = \frac{1}{2}$, il y a trois candidats sur $\mathcal{C}_1$:

$$\left(\tfrac{1}{2}, 0\right), \; (0,0), \; (3,0)$$

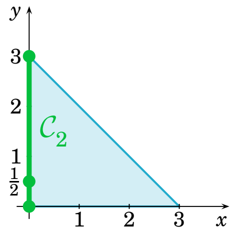


$\boxed{\mathcal{C}_2 \, : \, x = 0, \; 0 \leqslant y \leqslant 3}$

Ici $f(0,y) = y^2 - y = g(y)$, avec $y \in [0,3]$.

Comme $g'(y) = 2y - 1$ s'annule en $y = \frac{1}{2}$, il y a trois candidats sur $\mathcal{C}_2$:

$$\left(0, \tfrac{1}{2}\right), \; (0,0), \; (0,3)$$

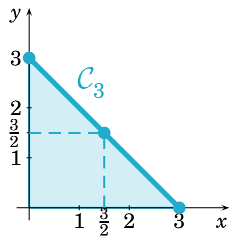


$\boxed{\mathcal{C}_3 \, : \, y = -x + 3, \; 0 \leqslant x \leqslant 3}$

$$\begin{aligned} \text{Ici } f(x, -x+3) &= x^2 - x(-x+3) + (-x+3)^2 - x - (-x+3) \\ &= 3x^2 - 9x + 6 = h(x) \qquad \text{avec } x \in [0,3] \end{aligned}$$

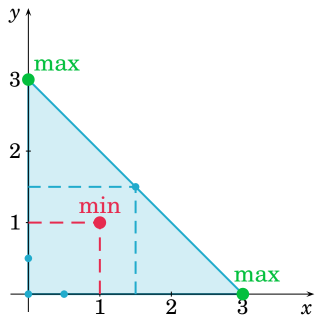
Comme $h'(x) = 6x - 9$ s'annule en $x = \frac{3}{2}$ et $-\frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{2}$, il y a trois candidats sur $\mathcal{C}_3$:

$$\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\right), \; (0,3), \; (3,0)$$



c) *Evaluation :*

$$\begin{aligned}
f(1,1) &= 1 - 1 + 1 - 1 - 1 = -1 && \text{(minimum global)} \\
f(0,0) &= 0 - 0 + 0 - 0 - 0 = 0 && \\
f\left(\tfrac{1}{2}, 0\right) &= \tfrac{1}{4} - 0 + 0 - \tfrac{1}{2} - 0 = -\tfrac{1}{4} && \\
f(3,0) &= 9 - 0 + 0 - 3 - 0 = 6 && \text{(maximum global)} \\
f\left(0, \tfrac{1}{2}\right) &= 0 - 0 + \tfrac{1}{4} - 0 - \tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{4} && \\
f(0,3) &= 0 - 0 + 9 - 0 - 3 = 6 && \text{(maximum global)} \\
f\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\right) &= \tfrac{9}{4} - \tfrac{9}{4} + \tfrac{9}{4} - \tfrac{3}{2} - \tfrac{3}{2} = -\tfrac{3}{4} &&
\end{aligned}$$



Par conséquent,

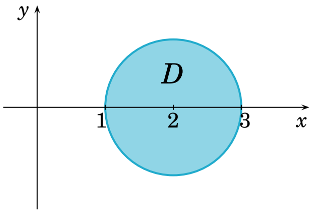
- $(1,1)$ est un point de minimum global de f
- $(3,0)$ et $(0,3)$ sont des points de maximum global de f

De plus,

$$-1 \leqslant f(x,y) \leqslant 6 \qquad \text{pour tout } (x,y) \in D\,.$$

2. $h(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ (distance à l'origine) restreinte au domaine

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-2)^2+y^2\leqslant 1\}.$$



Géométriquement nous nous attendons à trouver :

- point de minimum global de h : $(1,0)$
- point de maximum global de h : $(3,0)$

Remarque. Nous allons étudier la fonction différentiable $f(x,y)=x^2+y^2$ car cela va simplifier les calculs *sans* changer le résultat.

Comme $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y$, le seul point stationnaire de f est $(0,0)\notin D$.

Par conséquent, les points d'extremum de f sur le domaine D sont à chercher sur le bord de D, le cercle de rayon 1 et centre $(2,0)$. Nous avons :

$$(x-2)^2+y^2=1 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2-4x+4+y^2=1 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2+y^2=4x-3$$

Ainsi, sur le cercle, la fonction à étudier est

$$g(x)=4x-3, \qquad \text{avec } x\in[1,3].$$

Comme $g'(x)=4\neq 0$, les seuls candidats à point d'extremum de g sont les points du bord de $[1,3]$, à savoir $x=1$ et $x=3$. Les candidats pour f (et h) sont donc $(1,0)$ et $(3,0)$.

Comme $h(1,0)=1$ et $h(3,0)=3$, le point de minimum global de h est $(1,0)$ et le point de maximum global de h est $(3,0)$, comme attendu. De plus,

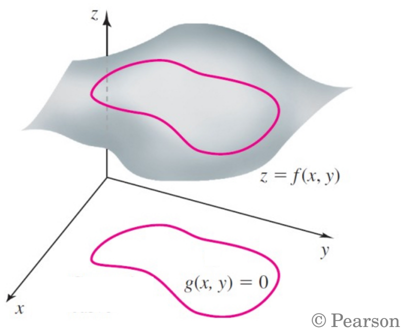
$$1\leqslant h(x,y)\leqslant 3, \qquad \text{pour tout } (x,y)\in D.$$

3.10. La méthode des multiplicateurs de Lagrange

Problème : Soit $f:D(f)\to\mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

Nous voulons trouver les points d'extremum $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ de f qui satisfont la *contrainte*

$$g(x_0,y_0)=0.$$



Autrement dit, trouver les points (x_0,y_0) sur la courbe de niveau 0 de la fonction g :

$$L_g(0)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : g(x,y)=0\}$$

tels que

$$f(x_0,y_0)\geqslant f(x,y) \quad (\text{ou } f(x_0,y_0)\leqslant f(x,y)), \qquad \text{pour tout } (x,y)\in L_g(0).$$

Application : Déterminer les points d'extremum de f sur le bord d'un domaine D.

Question : Comment trouver les points d'extremum $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ de f qui satisfont la contrainte $g(x_0, y_0) = 0$?

Une première approche consiste à résoudre $g(x,y) = 0$ pour obtenir y en fonction de x :

$$y = G(x)$$

et chercher ensuite les points d'extremum de la fonction d'une variable

$$h(x) = f\big(x, G(x)\big).$$

Alternativement, nous pouvons résoudre $g(x,y) = 0$ pour obtenir x en fonction de y :

$$x = G(y)$$

et chercher ensuite les points d'extremum de la fonction d'une variable

$$h(y) = f\big(G(y), y\big).$$

Plus généralement, nous pouvons essayer de trouver une paramétrisation

$$\vec{\varphi}(t) = \big(x(t), y(t)\big), \qquad \text{avec } t \in [a,b],$$

de la courbe $L_g(0)$ et chercher ensuite les points d'extremum de la fonction

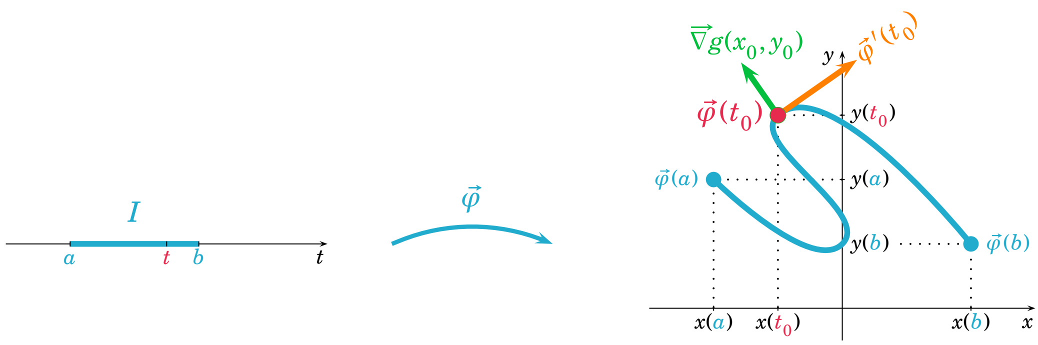
$$h(t) = f\big(\vec{\varphi}(t)\big) = (f \circ \vec{\varphi})(t) = f\big(x(t), y(t)\big), \qquad \text{avec } t \in [a,b].$$

Malheureusement, dans beaucoup de situations ces approches ne sont pas possibles.

Rappel. Nous avons vu que lorsqu'une fonction g est différentiable en $(x_0, y_0) \in D(g)$ et que la courbe de niveau de g qui passe par (x_0, y_0) possède une paramétrisation $\vec{\varphi} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ autour de (x_0, y_0) telle que

$$\vec{\varphi}(t_0) = (x_0, y_0), \qquad \text{avec } t_0 \in]a,b[$$

est régulière en t_0, alors le vecteur tangent $\vec{\varphi}\,'(t_0)$ ne s'annule pas et le vecteur $\vec{\nabla} g(x_0, y_0)$ existe et est orthogonal à la courbe de niveau de g qui passe par le point (x_0, y_0) :



Remarque. Une condition nécessaire pour que le point $\vec{\varphi}(t_0) = (x_0, y_0)$, avec $t_0 \in]a, b[$ soit un point d'extremum de la fonction f sur la courbe $L_g(0)$ est

$$(f \circ \vec{\varphi})'(t_0) = 0.$$

Autrement dit

$$\vec{\varphi}\,'(t_0) \cdot \vec{\nabla} f(x_0, y_0) = 0. \qquad (\star)$$

Idée (Lagrange, 1788)

L'équation $(\star)$ nous dit que si (x_0, y_0) est un point d'extremum de f sur la courbe $L_g(0)$ alors les vecteurs $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ et $\vec{\varphi}\,'(t_0)$ sont orthogonaux.

Comme par construction $\vec{\nabla} g(x_0, y_0)$ est lui aussi orthogonal au vecteur tangent $\vec{\varphi}\,'(t_0)$ (car $L_g(0)$ est la courbe de niveau 0 de la fonction g), les vecteurs $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ et $\vec{\nabla} g(x_0, y_0)$ doivent être parallèles.

Supposons que $\vec{\nabla} g(x_0, y_0)$ existe et soit non nul. Il existe alors un nombre réel λ tel que

$$\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \lambda \vec{\nabla} g(x_0, y_0).$$

Le nombre λ est appelé *multiplicateur de Lagrange*.

La condition nécessaire pour que (x_0, y_0) soit un point d'extremum sur $L_g(0)$ s'écrit

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \qquad (\star\star)$$

Nous avons donc à résoudre un système de trois équations à trois inconnues x_0, y_0 et λ.

En introduisant la *fonction de Lagrange $\mathcal{L}$* :

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda\, g(x, y),$$

le système d'équations $(\star\star)$ devient

$$\vec{\nabla} \mathcal{L}(x_0, y_0, \lambda) = (0, 0, 0).$$

De ce fait, la recherche de candidats à point d'extremum sous contrainte d'une fonction de deux variables se ramène tout simplement à la recherche de points stationnaires d'une fonction de trois variables.

Remarques.

- Pour pouvoir utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange, il faut commencer par vérifier que $\vec{\nabla} g(x_0, y_0)$ existe et est non nul pour tout $(x_0, y_0) \in L_g(0)$.
- La méthode des multiplicateurs de Lagrange nous fournit des candidats. Elle ne nous dit pas que si $(\star\star)$ est satisfait alors (x_0, y_0) est forcément un point d'extremum de f sous la contrainte $g(x_0, y_0) = 0$.
- La méthode des multiplicateurs de Lagrange se généralise à la recherche de points d'extremum de fonctions de $n \geqslant 2$ variables sous $k \geqslant 1$ contraintes, où il faut résoudre un système de $n + k$ équations avec $n + k$ inconnues.

  Par exemple,
$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) - \lambda_1 g_1(x, y, z) - \lambda_2 g_2(x, y, z)$$
  est la fonction de Lagrange associée à la fonction de trois variables f sous les contraintes
$$g_1(x, y, z) = 0 \qquad \text{et} \qquad g_2(x, y, z) = 0.$$

Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Pour trouver les points d'extremum de la fonction f sous la contrainte $g(x, y) = 0$:

1. Construire une nouvelle fonction, la *fonction de Lagrange* :
$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y).$$
2. Calculer les dérivées partielles de $\mathcal{L}$:
$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y, \lambda) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y, \lambda) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y), \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) &= -g(x, y).
\end{aligned}$$
3. Déterminer les points stationnaires de $\mathcal{L}$:
$$\begin{cases}
\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \\
\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \\
g(x_0, y_0) = 0
\end{cases} \tag{$\star$}$$

Exemples

1. Déterminer les points d'extremum de la fonction

$$f(x,y) = x + y$$

sous la contrainte $x^2 + y^2 = 2$ (cercle de rayon $\sqrt{2}$ centré à l'origine).

Soit $g(x,y) = x^2 + y^2 - 2$ la fonction contrainte.

Comme $\vec{\nabla} g(x,y) = (2x, 2y)$ s'annule en $(x,y) = (0,0)$ et $g(0,0) = -2 \neq 0$, nous pouvons utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Considérons la fonction de Lagrange

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x + y - \lambda\left(x^2 + y^2 - 2\right).$$

Comme :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,\lambda) = 1 - 2\lambda x, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,\lambda) = 1 - 2\lambda y, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = -\left(x^2 + y^2 - 2\right),$$

les points stationnaires de $\mathcal{L}$ satisfont :

$$\begin{cases} 1 - 2\lambda x = 0 & (1) \\ 1 - 2\lambda y = 0 & (2) \\ x^2 + y^2 = 2 & (3) \end{cases}$$

La soustraction de la première équation par la deuxième nous donne

$$-2\lambda x + 2\lambda y = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2\lambda(y - x) = 0$$

et cette équation est satisfaite si $y = x$ ou si $\lambda = 0$.

- Si $y = x$, la troisième équation devient $2x^2 = 2$, d'où $x = -1$ ou $x = 1$.
- Si $\lambda = 0$, la première équation devient $1 = 0$, ce qui est impossible.

Nous avons donc deux candidats :

$$(-1,-1) \quad \text{et} \quad (1,1)$$

Comme

$$\begin{aligned} f(-1,-1) &= -1 - 1 = -2 \\ f(1,1) &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

la fonction f est maximale en $(1,1)$ et minimale en $(-1,-1)$. De plus,

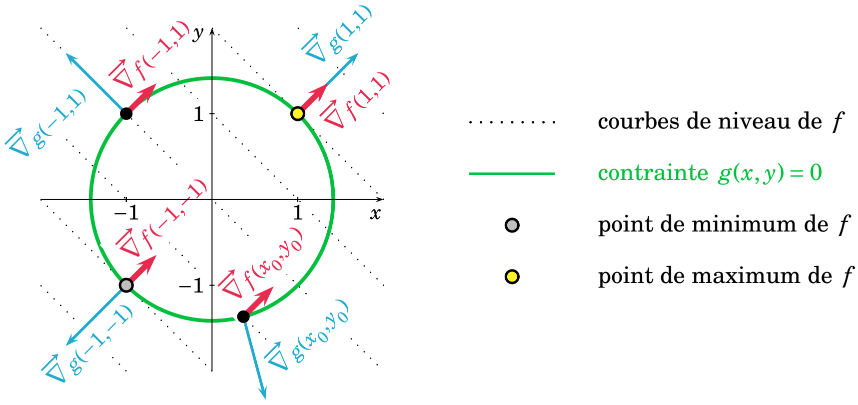
$$-2 \leqslant f(x,y) \leqslant 2 \qquad \text{pour tout } (x,y) \text{ sur le cercle } x^2 + y^2 = 2.$$

Remarque 1. La courbe de niveau c de la fonction f est la droite d'équation $y = -x + c$.

Comme le gradient de f

$$\vec{\nabla} f(x,y) = (1,1) \qquad \text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

est parallèlle à $\vec{\nabla} g(x,y) = (2x, 2y)$ lorsque $y = x$, nous retrouvons donc les points $(1,1)$ et $(-1,-1)$.



Remarque 2. Dans ce cas, il est aussi possible d'utiliser une paramétrisation du cercle d'équation $x^2+y^2=2$. Par exemple,

$$\vec{\varphi}(t)=\left(\sqrt{2}\cos(t),\ \sqrt{2}\sin(t)\right), \qquad \text{avec } t\in[0,2\pi].$$

Ainsi, la fonction d'une variable à étudier est

$$h(t)=f\big(\vec{\varphi}(t)\big)=\sqrt{2}\cos(t)+\sqrt{2}\sin(t), \qquad \text{avec } t\in[0,2\pi].$$

Comme $h'(t)=-\sqrt{2}\sin(t)+\sqrt{2}\cos(t)$ s'annule lorsque $t=\frac{\pi}{4}$ ou $t=\frac{5\pi}{4}$, nous retrouvons les points $(1,1)$ et $(-1,-1)$.

2. Déterminer les points d'extremum de la fonction

$$f(x,y)=x^2+y^2$$

sous la contrainte $(x-2)^2+y^2=1$.

Soit $g(x,y)=(x-2)^2+y^2-1$ la fonction contrainte.

Comme $\vec{\nabla}g(x,y)=\big(2(x-2),2y\big)$ s'annule en $(x,y)=(2,0)$ et $g(2,0)=-1\neq 0$, nous pouvons utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Soit

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=x^2+y^2-\lambda\big((x-2)^2+y^2-1\big).$$

Comme :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}(x,y,\lambda)=2x-2\lambda(x-2), \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}(x,y,\lambda)=2y-2\lambda y, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,\lambda)=-\big((x-2)^2+y^2-1\big),$$

les points stationnaires de $\mathcal{L}$ satisfont :

$$\begin{cases} x-\lambda(x-2)=0 & (1)\\ y(1-\lambda)=0 & (2)\\ (x-2)^2+y^2=1 & (3)\end{cases}$$

La deuxième équation est satisfaite si $y=0$ ou si $\lambda=1$.

- Si $y=0$, la troisième équation devient $(x-2)^2=1$, d'où $x=1$ et $x=3$.
- Si $\lambda=1$, la première équation devient $x-(x-2)=0$, d'où $2=0$, ce qui est impossible.

Nous retrouvons donc les deux candidats trouvés précédemment, à savoir $(1,0)$ et $(3,0)$.

3.11. Polynômes de Taylor.

Rappel. ($n=1$).

Soit f une fonction d'une variable de classe C^{k+1}, avec $k \in \mathbb{N}$

Soit $x_0 \in D(f)$. Le polynôme de Taylor de degré k de f autour de x_0 est donné par:

$$p_k(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Cas importants:

$k=1$: $p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ (approximation linéaire)

$k=2$: $p_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$

$= p_1(x) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$ (approximation quadratique)

But: Généraliser cette notion aux fonctions de n variables.

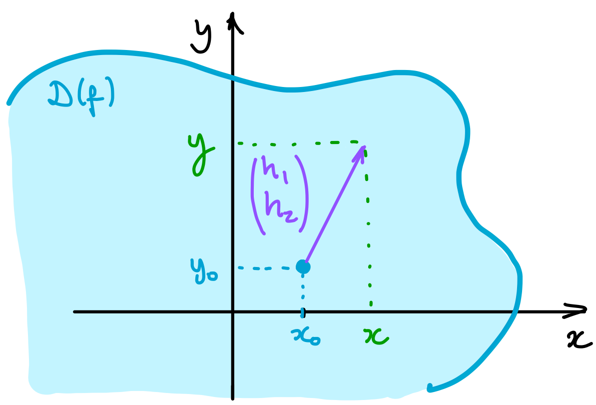
Soit $f: D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables de classe C^k (avec $k \geq 2$) et soit $(x_0,y_0) \in D(f)$

Soit $(x,y) \in D(f)$ un point fixé (proche de (x_0,y_0))

On a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + x - x_0 \\ y_0 + y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$

où nous avons posé

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$



Le segment reliant (x_0, y_0) à (x,y) peut-être paramétrée par

$$\vec{\varphi}(t) = (x_0 + t h_1 , y_0 + t h_2) \text{ , avec } t \in [0,1]$$

Soit $g(t) = (f \circ \vec{\varphi})(t) = f(x_0 + t h_1 , y_0 + t h_2)$ (fonction d'une variable)

Par construction : $g(0) = f(x_0, y_0)$

$g(1) = f(x,y)$

Les polynômes de Taylor de degrés 1 et 2 de g autour de $t=0$ sont :

$$P_1(t) = g(0) + g'(0)\, t$$

$$P_2(t) = g(0) + g'(0)\, t + \frac{g''(0)}{2} t^2$$

On peut utiliser $P_1(1) = g(0) + g'(0)$ et $P_2(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2} g''(0)$

pour approximer $g(1) = f(x,y)$!

On doit donc calculer $g'(0)$ et $g''(0)$:

Comme $g(t) = (f \circ \vec{\varphi})(t) = f(x_0 + t h_1 , y_0 + t h_2)$

on a

$$g'(t) = \vec{\varphi}'(t) \cdot \vec{\nabla}_f(\vec{\varphi}(t)) = \langle \vec{\varphi}'(t) , \vec{\nabla}_f(\vec{\varphi}(t)) \rangle$$

$$= \langle \vec{h} , \vec{\nabla}_f(\vec{\varphi}(t)) \rangle$$

$$= h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + t h_1 , y_0 + t h_2) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + t h_1 , y_0 + t h_2)$$

d'où : $g'(0) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

Ainsi, $P_1(1) = g(0) + g'(0)$

$$= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

et on retrouve la formule pour l'approximation linéaire.

D'autre part,

$$g''(t) = \left(h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+th_1, y_0+th_2) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+th_1, y_0+th_2)\right)'$$
$$= h_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0+th_1, y_0+th_2) h_1 + h_1 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0+th_1, y_0+th_2) h_2$$
$$+ h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0+th_1, y_0+th_2) h_1 + h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0+th_1, y_0+th_2) h_2$$

d'où :

$$g''(0) = h_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) h_1 + h_1 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) h_2$$
$$+ h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) h_1 + h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) h_2$$
$$= (h_1 \ h_2) \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}}_{\text{matrice hessienne}} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Si l'on note $H_f(x_0, y_0)$ la matrice hessienne, nous avons donc :

$$g''(0) = \vec{h}^T H_f(x_0, y_0) \vec{h}$$
$$= \langle \vec{h}, H_f(x_0, y_0) \vec{h} \rangle$$

Ainsi,

$$P_2(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2} g''(0)$$
$$= f(x_0, y_0) + \langle \vec{\nabla} f(x_0, y_0), \vec{x} - \vec{x_0} \rangle + \frac{1}{2} \langle \vec{x} - \vec{x_0}, H_f(x_0, y_0)(\vec{x} - \vec{x_0}) \rangle$$

approxime $f(x, y)$.

Définition.

Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $D(f)$.

Soit $\vec{x}_0 = (x_0, y_0) \in D(f)$. Le polynôme de Taylor d'ordre 1 de f autour de $\vec{x_0}$ est défini par

$$p_1(\vec{x}) = f(\vec{x_0}) + \langle \vec{\nabla} f(\vec{x_0}), \vec{x} - \vec{x_0} \rangle \text{ , pour tout } \vec{x} \in \mathbb{R}^2$$

Si l'on suppose que f est de classe C^2, on définit le polynôme de Taylor d'ordre 2 de f autour de $\vec{x_0}$ par :

$$p_2(\vec{x}) = f(\vec{x_0}) + \langle \vec{\nabla} f(\vec{x_0}), \vec{x} - \vec{x_0} \rangle + \frac{1}{2} \langle \vec{x} - \vec{x_0}, H_f(\vec{x_0})(\vec{x} - \vec{x_0}) \rangle,$$

pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$.

On a $p_2(\vec{x}) = p_1(\vec{x}) + \frac{1}{2} \langle \vec{x} - \vec{x_0}, H_f(\vec{x_0})(\vec{x} - \vec{x_0}) \rangle$.

Remarques.

Ces définitions se généralisent naturellement aux fonctions de n variables $f : D(f) \to \mathbb{R}$ avec $D(f) \subset \mathbb{R}^n$:

$$p_1(\vec{x}) = f(\vec{x_0}) + \langle \vec{\nabla} f(\vec{x_0}), \vec{x} - \vec{x_0} \rangle \text{ ,}$$

$$\begin{aligned} p_2(\vec{x}) &= f(\vec{x_0}) + \langle \vec{\nabla} f(\vec{x_0}), \vec{x} - \vec{x_0} \rangle + \frac{1}{2} \langle \vec{x} - \vec{x_0}, H_f(\vec{x_0})(\vec{x} - \vec{x_0}) \rangle \\ &= p_1(\vec{x}) + \frac{1}{2} \langle \vec{x} - \vec{x_0}, H_f(\vec{x_0})(\vec{x} - \vec{x_0}) \rangle \end{aligned}$$

pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

Exemple.

Soit $f(x,y)=\sin(x+y)+\cos(x-3y)$, fonction de classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$

Calculer les polynômes de Taylor d'ordre 1 et 2 de f autour de l'origine.

On a $f(0,0)=\sin(0)+\cos(0)=1$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\cos(x+y)-\sin(x-3y)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\cos(x+y)+3\sin(x-3y)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{\nabla} f(0,0)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=-\sin(x+y)-\cos(x-3y)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=-\sin(x+y)+3\cos(x-3y)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-\sin(x+y)-9\cos(x-3y)\end{array}\right\}\Rightarrow H_f(0,0)=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & -9\end{pmatrix}$$

Comme $\left\langle \vec{\nabla} f(0,0),\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\rangle=x+y$

et $\left\langle\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},H_f(0,0)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & -9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-x+3y\\3x-9y\end{pmatrix}\right\rangle$

$$=-x^2+3xy+3xy-9y^2=-x^2-9y^2+6xy$$

Nous trouvons :

$P_1(x,y)=f(0,0)+\left\langle \vec{\nabla} f(0,0),\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\rangle \Rightarrow P_1(x,y)=1+x+y$

$P_2(x,y)=P_1(x,y)+\frac{1}{2}\left\langle\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},H_f(0,0)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\rangle$

$\Rightarrow P_2(x,y)=1+x+y-\frac{1}{2}x^2-\frac{9}{2}y^2+3xy$

Remarque.

De manière analogue aux fonctions d'une variable, il est aussi possible d'utiliser des développements limités (en gardant les termes relevants) pour calculer des polynômes de Taylor :

Rappel: $\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \ldots$

$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \ldots$

d'où $\sin(x+y) = (x+y) - \frac{1}{3!}(x+y)^3 + \ldots$

$\cos(x-3y) = 1 - \frac{1}{2}(x-3y)^2 + \ldots = 1 - \frac{1}{2}(x^2 - 6xy + 9y^2) + \ldots$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1(x,y) = 1 + x + y \\ p_2(x,y) = 1 + x + y - \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{2}y^2 + 3xy \end{cases} \quad \text{(comme avant)}$$

Rappels. (Algèbre linéaire)

- Une matrice A de taille $n \times n$ est symétrique si $A^T = A$.
- Si A est une matrice symétrique de taille $n \times n$, alors elle est diagonalisable orthogonalement : $A = PDP^T$ où $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les n valeurs propres de A (pas forcément différentes) et $P = (\vec{u}_1 \cdots \vec{u}_n)$ est une matrice orthogonale telle que $A\vec{u}_j = \lambda_j \vec{u}_j$ et $\|\vec{u}_j\| = 1$.

- Soit $\mathcal{E}=\{\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}=\{\vec{u_1},\dots,\vec{u_n}\}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A.
La matrice $P=(\vec{u_1},\dots,\vec{u_n})$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{E}$
et $P^T=P^{-1}$ est la matrice de passage de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{B}$
Soit $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$. On peut écrire :

$$\vec{x}=x_1\vec{e_1}+\dots+x_n\vec{e_n} \quad \text{et} \quad \vec{x}=y_1\vec{u_1}+\dots+y_n\vec{u_n}$$

d'où $[\vec{x}]_{\mathcal{E}}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\vec{x}$ et $[\vec{x}]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=P^T[\vec{x}]_{\mathcal{E}}=P^T\vec{x}$

- Si A est une matrice symétrique de taille $n\times n$, alors la fonction $Q:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ définie par $Q(\vec{x})=\vec{x}^TA\vec{x}$, avec $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ est appelée la forme quadratique associée.
On dit que Q est définie positive si $Q(\vec{x})>0$ pour tout $\vec{x}\neq\vec{0}$
On dit que Q est définie négative si $Q(\vec{x})<0$ pour tout $\vec{x}\neq\vec{0}$
On dit que Q est non définie si $Q(\vec{x})$ prend à la fois des valeurs positives et négatives.
Si $A=PDP^T$, alors on peut écrire:

$$Q(\vec{x})=\langle\vec{x},A\vec{x}\rangle=\vec{x}^TA\vec{x}=\vec{x}^TPDP^T\vec{x}$$
$$=(P^T\vec{x})^TD(P^T\vec{x})=\lambda_1\underbrace{y_1^2}_{\geqslant 0}+\lambda_2\underbrace{y_2^2}_{\geqslant 0}+\lambda_3\underbrace{y_3^2}_{\geqslant 0}+\dots+\lambda_n\underbrace{y_n^2}_{\geqslant 0}$$

- Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$.
  Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A.
  Soit $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ la forme quadratique associée.
  On peut montrer :
  Q est définie positive $\iff$ $\lambda_j > 0$ pour tout $j = 1, \ldots, n$
  Q est définie négative $\iff$ $\lambda_j < 0$ pour tout $j = 1, \ldots, n$
  Q est non définie $\iff$ A possède des valeurs propres positives et négatives.

Fin du "rappel".

Application à la recherche de points d'extremum.

Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction de n variables de classe C^2.
Dans ce cas, $H_f(\vec{x}_0)$ est une matrice symétrique.
Si $\vec{x}_0$ est un point stationnaire de f, alors $\vec{\nabla} f(\vec{x}_0) = \vec{0}$
et le polynôme de Taylor d'ordre 2 autour de $\vec{x}_0$ devient :

$$\begin{aligned} P_2(\vec{x}) &= f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2} \langle \vec{x} - \vec{x}_0, H_f(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) \rangle \\ &= f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2} Q_f(\vec{x} - \vec{x}_0) \end{aligned}$$

où Q_f est la forme quadratique associée à $H_f(\vec{x}_0)$ (la matrice hessienne de f évaluée en $\vec{x}_0$).

On distingue trois cas :

1) S'il existe un nombre $\delta > 0$ tel que pour tout $\vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta) \setminus \{\vec{x}_0\}$ on a $Q_f(\vec{x} - \vec{x}_0) > 0$, alors $\vec{x}_0$ est un point de minimum local de f.

2) S'il existe un nombre $\delta > 0$ tel que pour tout $\vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta) \setminus \{\vec{x}_0\}$ on a $Q_f(\vec{x} - \vec{x}_0) < 0$, alors $\vec{x}_0$ est un point de maximum local de f.

3) Si pour tout $\delta > 0$, $Q_f(\vec{x} - \vec{x}_0)$ prend des valeurs positives et négatives sur $B(\vec{x}_0, \delta) \setminus \{\vec{x}_0\}$ alors $\vec{x}_0$ n'est pas un point d'extremum local de f.

Théorème.

Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction de n variables de classe C^2.
Soit $\vec{x}_0 \in D(f)$ un point stationnaire de f $\left(\text{c-à-d. } \vec{\nabla} f(\vec{x}_0) = \vec{0}\right)$.
Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de $H_f(\vec{x}_0)$.

- Si $\lambda_j > 0$ pour tout $j = 1, \dots, n$, alors $\vec{x}_0$ est un point de minimum local de f.
- Si $\lambda_j < 0$ pour tout $j = 1, \dots, n$, alors $\vec{x}_0$ est un point de maximum local de f.
- S'il y a des valeurs propres positives <u>et</u> négatives, alors $\vec{x}_0$ est un point selle de f.

Cas $n=2$:

Soit $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice symétrique.

Le polynôme caractéristique de A est :

$$\begin{aligned} p_c(A) &= \det(A-\lambda I) \\ &= \det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & d-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (a-\lambda)(d-\lambda)-b^2 \\ &= \lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-b^2) \\ &= \lambda^2-\underbrace{Tr(A)}\lambda+\underbrace{\det(A)} \end{aligned}$$

$$p_c(A)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)=\lambda^2-\underbrace{(\lambda_1+\lambda_2)}\lambda+\underbrace{\lambda_1\lambda_2}$$

Ainsi, les valeurs propres de A satisfont

$$\begin{cases} \lambda_1\lambda_2 = \det(A) = ad-b^2 \\ \lambda_1+\lambda_2 = Tr(A) = a+d \end{cases}$$

On distingue les cas suivants :

$$\begin{aligned} \lambda_1,\lambda_2 > 0 &\iff \det(A)>0 \text{ et } Tr(A)=a+d>0 \\ &\iff \det(A)>0 \text{ et } a>0 \text{ et } d>0 \\ \lambda_1,\lambda_2 < 0 &\iff \det(A)>0 \text{ et } Tr(A)=a+d<0 \\ &\iff \det(A)>0 \text{ et } a<0 \text{ et } d<0 \\ \lambda_1>0>\lambda_2 &\iff \det(A)<0 \\ \lambda_1=0 \text{ ou } \lambda_2=0 &\iff \det(A)=0 \end{aligned}$$

Conséquence.

Pour caractériser la nature des points stationnaires de fonctions de <u>deux</u> variables, il n'est pas nécessaire de déterminer les valeurs propres de $H_f(x_0,y_0)$. En effet, le signe du hessien

$$\mathcal{H}(x_0,y_0) = \det\left(H_f(x_0,y_0)\right)$$

et le signe d'une des dérivées partielles d'ordre 2

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$$

suffisent.

Exemple.

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ définie par

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+2xyz$$

a) Vérifier que $(0,0,0)$ et $(-1,1,1)$ sont des points stationnaires de f

b) Déterminer la nature de ces points (point de minimum local, point de maximum local, point selle).

a) On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x+2yz$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y+2xz$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z+2xy$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} f(0,0,0) = (0,0,0) \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} f(-1,1,1) = (-2+2, 2-2, 2-2) = (0,0,0)$$

b) Dérivées partielles d'ordre 2:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)=2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z)=2z \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z)=2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z)=2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z)=2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)=2$$

$$\Rightarrow H_f(x,y,z)=\begin{pmatrix} 2 & 2z & 2y \\ 2z & 2 & 2x \\ 2y & 2x & 2 \end{pmatrix}$$

- $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$: $\quad H_f(0,0,0)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

valeurs propres : $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2>0$

$\Rightarrow$ $(0,0,0)$ est un point de minimum local de f

- $(x_0,y_0,z_0)=(-1,1,1)$: $\quad H_f(-1,1,1)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}=A$

valeurs propres :

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \underset{\substack{C_1\to C_1+C_2 \\ C_3\to C_3-C_2}}{=} \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ 4-\lambda & 2-\lambda & -4+\lambda \\ 0 & -2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2\to L_2-L_1}{=}\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & -\lambda & -4+\lambda \\ 0 & -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} \underset{\text{dév. } C_1}{=} (4-\lambda)\det\begin{pmatrix} -\lambda & -4+\lambda \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1\to L_1+L_2}{=}(4-\lambda)\det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(-2-\lambda)(4-\lambda)$$

valeurs propres : $\left.\begin{array}{l} \lambda_1=4>0 \\ \lambda_2=4>0 \\ \lambda_3=-2<0 \end{array}\right\} \Rightarrow (-1,1,1)$ est un point selle de f.

3.12. Théorème des fonctions implicites.

Dans certaines situations, lorsqu'on a une équation de la forme

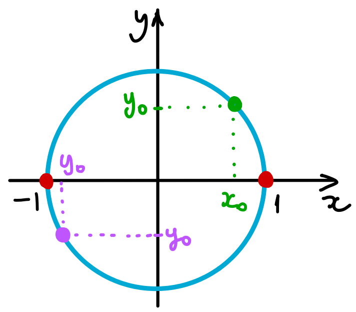
$$F(x,y)=0$$

on aimerait pouvoir exprimer y en fonction de x autour d'un point $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ tel que $F(x_0,y_0)=0$. Autrement dit, on aimerait trouver un intervalle $I=]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$, avec $\varepsilon>0$, où on peut définir une fonction d'une variable $g: I\longrightarrow\mathbb{R}$ telle que

$$g(x_0)=y_0 \quad \text{et} \quad F(x,g(x))=0 \ \text{pour tout } x\in I.$$

Question. Quelles sont les conditions que l'on doit imposer à F pour que cela soit possible?

Exemple.



Considérons la fonction $F(x,y)=x^2+y^2-1$

On a $F(x,y)=0 \iff x^2+y^2=1$

(cercle de rayon 1 centré en $(0,0)$)

Soit $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ tel que $F(x_0,y_0)=0$. On distingue trois cas:

- Si $y_0>0$, alors $-1<x_0<1$ et $\varepsilon=\min(|x_0-1|,|x_0+1|)>0$

  On choisit $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ avec $D(g)=]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$
- Si $y_0<0$, alors $-1<x_0<1$ et $\varepsilon=\min(|x_0-1|,|x_0+1|)>0$

  On choisit $g(x)=-\sqrt{1-x^2}$ avec $D(g)=]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$
- Si $y_0=0$, on ne peut pas définir $y=g(x)$ autour de $(\pm1,0)$.

Théorème (des fonctions implicites). (cas $n=2$)

Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble ouvert.

Soit $F : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.

Soit $(x_0, y_0) \in U$ tel que :

- $F(x_0, y_0) = 0$
- $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

alors il existe $\varepsilon > 0$ et une fonction $g :]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que

- $y_0 = g(x_0)$ et
- $F(x, g(x)) = 0$ pour tout $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$.

De plus,

$$\boxed{g'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))}} \qquad (*)$$

En particulier, pour $x = x_0$ on a :

$$\boxed{g'(x_0) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}}$$

Ainsi, nous pouvons calculer la dérivée de g en x_0 sans avoir une expression explicite pour g.

Preuve de $(*)$:

On a $F(x, g(x)) = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x)) \cdot \underbrace{x'}_{=1} + \frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))\, g'(x) = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))\, g'(x) = - \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x)) \Rightarrow (*)$.

Exemple.

Considérons à nouveau $F(x,y)=x^2+y^2-1$ (fonction de classe C^1)

On a $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=2x$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=2y$

Comme $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=0 \Leftrightarrow y=0$, nous pouvons appliquer le théorème à tout point (x_0,y_0) avec $y_0\neq 0$. Dans ce cas, il existe donc $\varepsilon>0$ ($\varepsilon=\min(|x_0-1|,|x_0+1|)$) et $g :]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(x_0)=y_0$ et

$$g'(x_0)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)} = -\frac{2x_0}{2y_0} \Rightarrow g'(x_0)=-\frac{x_0}{y_0}$$

De plus, l'équation de la droite tangente à la courbe $y=g(x)$ au point (x_0,y_0) est :

$$y=g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0) \Rightarrow y=y_0-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$$

Remarque.

On a un résultat analogue si $(x_0,y_0)\in U$ est tel que :

- $F(x_0,y_0)=0$
- $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)\neq 0$

alors il existe $\varepsilon>0$ et une fonction $h :]y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon[\rightarrow\mathbb{R}$ de classe C^1 telle que

- $x_0=h(y_0)$
- $F(h(y),y)=0$ pour tout $y\in]y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon[$

De plus $\boxed{h'(y)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(h(y),y)}{\frac{\partial F}{\partial x}(h(y),y)}}$ et $\boxed{h'(y_0)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}}$

Exemple.

Considérons $F(x,y)=x^3+xy+y^3-11$, fonction de classe C^1.

On a $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=3x^2+y$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=x+3y^2$

Comme $F(2,1)=2^3+2+1-11=0$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(2,1)=2+3=5\neq 0$,

il existe $\varepsilon>0$ et $g:]2-\varepsilon,2+\varepsilon[\to\mathbb{R}$ telle que $g(2)=1$

et $F(x,g(x))=0$. De plus, $g'(2)=-\frac{3\cdot 2^2+1}{2+3\cdot 1^2}=-\frac{13}{5}$

Ainsi, l'équation de la droite tangente à g au point $(2,1)$

au point $(2,1)$ est $y=1-\frac{13}{5}(x-2) \iff y=-\frac{13}{5}x+\frac{31}{5}$

Comme $\frac{\partial F}{\partial x}(2,1)=12+1=13\neq 0$, nous avons aussi une fonction

$h:]1-\delta,1+\delta[\to\mathbb{R}$ telle que $h(1)=2$, $F(h(y),y)=0$ et $h'(1)=-\frac{5}{13}$

Théorème (des fonctions implicites). (cas $n=3$)

Soit $U\subset\mathbb{R}^3$ un ensemble ouvert.

Soit $F:U\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.

Soit $(x_0,y_0,z_0)\in U$ tel que :

- $F(x_0,y_0,z_0)=0$
- $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$

alors il existe $\varepsilon>0$ et une fonction $g:B((x_0,y_0),\varepsilon)\to\mathbb{R}$

de classe C^1 telle que

- $z_0=g(x_0,y_0)$
- $F(x,y,g(x,y))=0$ pour tout $(x,y)\in B((x_0,y_0),\varepsilon)$

De plus, $\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,g(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y))} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,g(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y))} \end{cases}$

En particulier, pour $(x,y)=(x_0,y_0)$ on a:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)} \end{cases}$$

Ainsi, nous pouvons calculer les dérivées partielles de g sans avoir une expression explicite pour g.

Résultats analogues pour $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$ ou $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$

3.13. Dérivée d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

Rappel: Théorème fondamental du calcul intégral

Si $g \in C^0(\mathbb{R})$, alors

$$\int_a^b g(x)\,dx = G(b) - G(a)$$ où G est une primitive de g.

En particulier, nous avons vu que

$$H(t) = \int_a^t g(x)\,dx$$

est la primitive de g qui vaut 0 en $t=a$:

$$H'(t) = g(t)$$
$$H(a) = \int_a^a g(x)\,dx = 0$$

Généralisation :

$$\int_{a(t)}^{b(t)} g(x)\,dx = G(b(t)) - G(a(t)) \quad \text{où } G \text{ est une primitive de } g.$$

Si l'on suppose que a et b sont des fonctions de classe C^1, alors la dérivation par rapport à t nous donne :

$$\left(\int_{a(t)}^{b(t)} g(x)\,dx\right)' = \left(G(b(t)) - G(a(t))\right)'$$

$$= g(b(t))\underbrace{b'(t)}_{=\text{dérivée interne}} - g(a(t))\underbrace{a'(t)}_{=\text{dérivée interne}}$$

Proposition.

Soient $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ et $a, b \in C^1(\mathbb{R})$. Soit

$$F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx$$

alors

$$\boxed{F'(t) = f(b(t),t)\,b'(t) - f(a(t),t)\,a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx} \quad (*)$$

Cas particulier :

Soient $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ et $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$. Soit

$$F(t) = \int_{a_0}^{b_0} f(x,t)\,dx$$

alors

$$\boxed{F'(t) = \int_{a_0}^{b_0} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx} \quad (**)$$

Idée de preuve de (**) :

Soit $F(t) = \int_{a_0}^{b_0} f(x,t)\,dx$

On a :
$$F'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{F(t+h)-F(t)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_{a_0}^{b_0} f(x,t+h)\,dx - \int_{a_0}^{b_0} f(x,t)\,dx\right]$$
$$= \lim_{h\to 0} \int_{a_0}^{b_0} \frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h}\,dx$$
$$= \int_{a_0}^{b_0}\left(\lim_{h\to 0} \frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h}\right)dx = \int_{a_0}^{b_0} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$$

comme $\frac{\partial f}{\partial t}$ est continue, pour tout t fixé et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $|h| < \delta$ (indépendant de $x \in [a_0, b_0]$) alors $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) - \frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h}\right| < \varepsilon$ ■

Preuve de (*) :

Soit $g(a,b,t) = \int_a^b f(x,t)\,dx = -\int_b^a f(x,t)\,dx$

fonction de trois variables. On a :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial a}(a,b,t) &= -f(a,t) \\ \frac{\partial g}{\partial b}(a,b,t) &= f(b,t) \end{aligned}\right\}\ \text{théorème fondamental du calcul intégral}$$
$$\frac{\partial g}{\partial t}(a,b,t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx \qquad (\text{par } (**))$$

Comme $F(t) = g(a(t), b(t), t) = (g \circ \vec{\varphi})(t)$ où $\vec{\varphi}(t) = (a(t), b(t), t)$.

nous avons $F'(t) = \vec{\nabla} g(\vec{\varphi}(t)) \cdot \vec{\varphi}\,'(t)$ avec $\vec{\varphi}\,'(t) = (a'(t), b'(t), 1)$.

Autrement dit,

$$F'(t) = -f(a(t),t)\,a'(t) + f(b(t),t)\,b'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx \quad ■$$

Exemples.

1. Soit $F(t) = \int_0^{\pi} \frac{\sin(tx)}{x}\, dx$. Calculer $F'(\frac{1}{2})$.

La fonction $f(x,t) = \frac{\sin(tx)}{x}$ est une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ telle que $f(0,t) = t$.

On a : $F'(t) = \int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sin(tx)}{x}\right) dx = \int_0^{\pi} \frac{\cos(tx)\cdot x}{x}\, dx$

$$= \int_0^{\pi} \cos(tx)\, dx = \left[\frac{\sin(tx)}{t}\right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{\sin(\pi t)}{t}$$

d'où $F'(\frac{1}{2}) = 2\sin(\frac{\pi}{2}) = 2$

2. Soit maintenant $F(t) = \int_t^{t^2} \frac{\sin(tx)}{x}\, dx$. Calculer $F'(\frac{1}{2})$.

On a :

$$F'(t) = \frac{\sin(t\cdot t^2)}{t^2} \cdot \underbrace{(t^2)'}_{=2t} - \frac{\sin(t\cdot t)}{t} \cdot \underbrace{(t)'}_{=1} + \int_t^{t^2} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sin(tx)}{x}\right) dx$$

$$= \frac{2}{t}\sin(t^3) - \frac{1}{t}\sin(t^2) + \left[\frac{\sin(tx)}{t}\right]_{x=t}^{x=t^2}$$

$$= \frac{2}{t}\sin(t^3) - \frac{1}{t}\sin(t^2) + \frac{1}{t}\sin(t^3) - \frac{1}{t}\sin(t^2)$$

$$= \frac{3}{t}\sin(t^3) - \frac{2}{t}\sin(t^2)$$

d'où $F'(\frac{1}{2}) = 6\sin(\frac{1}{8}) - 4\sin(\frac{1}{4})$