

Cas $n=2$:

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice symétrique.

Le polynôme caractéristique de A est:

$$\begin{aligned} p_c(A) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & d-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (a-\lambda)(d-\lambda) - b^2 \\ &= \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - b^2) \\ &= \lambda^2 - \underbrace{\text{Tr}(A)} \lambda + \underbrace{\det(A)} \end{aligned}$$

$$p_c(A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - \underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2)} \lambda + \underbrace{\lambda_1 \lambda_2}$$

Ainsi, les valeurs propres de A satisfont

$$\begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 = \det(A) = ad - b^2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr}(A) = a + d \end{cases}$$

On distingue les cas suivants :

$$\lambda_1, \lambda_2 > 0 \iff \det(A) > 0 \text{ et } \text{Tr}(A) = a + d > 0$$

$$\iff \det(A) > 0 \text{ et } a > 0 \text{ et } d > 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2 < 0 \iff \det(A) > 0 \text{ et } \text{Tr}(A) = a + d < 0$$

$$\iff \det(A) > 0 \text{ et } a < 0 \text{ et } d < 0$$

$$\lambda_1 > 0 > \lambda_2 \iff \det(A) < 0$$

$$\lambda_1 = 0 \text{ ou } \lambda_2 = 0 \iff \det(A) = 0$$

Conséquence.

Pour caractériser la nature des points stationnaires de fonctions de deux variables, il n'est pas nécessaire de déterminer les valeurs propres de $H_f(x_0, y_0)$. En effet, le signe du hessien

$$\mathcal{H}(x_0, y_0) = \det(H_f(x_0, y_0))$$

et le signe d'une des dérivées partielles d'ordre 2

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

suffisent.

Exemple.

Considérons la fonction $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ définie par

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$$

- a) Vérifier que $(0, 0, 0)$ et $(-1, 1, 1)$ sont des points stationnaires de f
b) Déterminer la nature de ces points (point de minimum local, point de maximum local, point selle).

a) On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x + 2yz$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2y + 2xz$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2z + 2xy$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} f(0, 0, 0) = (0, 0, 0) \text{ et } \vec{\nabla} f(-1, 1, 1) = (-2+2, 2-2, 2-2) = (0, 0, 0)$$

b) Dérivées partielles d'ordre 2:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = 2z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) = 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = 2$$

$$\Rightarrow H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 2z & 2y \\ 2z & 2 & 2x \\ 2y & 2x & 2 \end{pmatrix}$$

• $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$:

$$H_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

valeurs propres : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2 > 0$

$\Rightarrow (0,0,0)$ est un point de minimum local de f

• $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 1, 1)$: $H_f(-1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = A$

valeurs propres:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ 4-\lambda & 2-\lambda & -4+\lambda \\ 0 & -2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$\uparrow$
 $C_1 \rightarrow C_1 + C_2$
 $C_3 \rightarrow C_3 - C_2$

$$= \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & -\lambda & -4+\lambda \\ 0 & -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda) \det \begin{pmatrix} -\lambda & -4+\lambda \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$\uparrow$
 $L_2 \rightarrow L_2 - L_1$

$\uparrow$
 dev. C_1

$$= (4-\lambda) \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(-2-\lambda)(4-\lambda)$$

$\uparrow$
 $L_1 \rightarrow L_1 + L_2$

valeurs propres: $\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = 4 > 0 \\ \lambda_2 = 4 > 0 \\ \lambda_3 = -2 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (-1, 1, 1) \text{ est un point selle de } f.$

3.12. Théorème des fonctions implicites.

Dans certaines situations, lorsqu'on a une équation de la forme

$$F(x, y) = 0$$

on aimerait pouvoir exprimer y en fonction de x autour d'un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $F(x_0, y_0) = 0$. Autrement dit, on aimerait trouver un intervalle $I =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, avec $\varepsilon > 0$, où on peut définir une fonction d'une variable $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$g(x_0) = y_0 \quad \text{et} \quad F(x, g(x)) = 0 \quad \text{pour tout } x \in I.$$

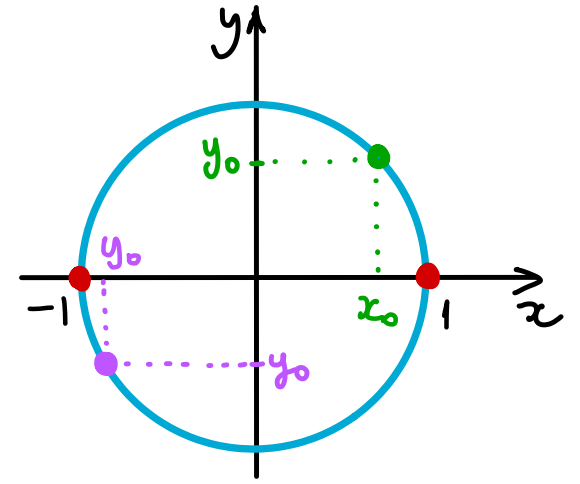
Question. Quelles sont les conditions que l'on doit imposer à F pour que cela soit possible ?

Exemple.

Considérons la fonction $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

On a $F(x,y) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

(cercle de rayon 1 centré en $(0,0)$)



Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $F(x_0, y_0) = 0$. On distingue trois cas :

- Si $y_0 > 0$, alors $-1 < x_0 < 1$ et $\varepsilon = \min(|x_0 - 1|, |x_0 + 1|) > 0$

On choisit $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ avec $\mathcal{D}(g) =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$

- Si $y_0 < 0$, alors $-1 < x_0 < 1$ et $\varepsilon = \min(|x_0 - 1|, |x_0 + 1|) > 0$

On choisit $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ avec $\mathcal{D}(g) =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$

- Si $y_0 = 0$, on ne peut pas définir $y = g(x)$ autour de $(\pm 1, 0)$.

Théorème (des fonctions implicites). (cas $n=2$)

Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble ouvert.

Soit $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 .

Soit $(x_0, y_0) \in U$ tel que :

- $F(x_0, y_0) = 0$
- $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

alors il existe $\varepsilon > 0$ et une fonction $g:]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}$

de classe C^1 telle que

- $y_0 = g(x_0)$ et
- $F(x, g(x)) = 0$ pour tout $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$.

De plus,

$$g'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))} \quad (*)$$

En particulier, pour $x=x_0$ on a:

$$g'(x_0) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

Ainsi, nous pouvons calculer la dérivée de g en x_0 sans avoir une expression explicite pour g .

Preuve de (*):

$$\text{On a } F(x, g(x)) = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x)) \cdot \underbrace{x'}_{=1} + \frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x)) g'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x)) g'(x) = - \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x)) \Rightarrow (*).$$

Exemple.

Considérons à nouveau $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ (fonction de classe C^1)

$$\text{On a } \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2y$$

Comme $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$, nous pouvons appliquer le théorème

à tout point (x_0, y_0) avec $y_0 \neq 0$. Dans ce cas, il existe donc $\varepsilon > 0$

($\varepsilon = \min(|x_0 - 1|, |x_0 + 1|)$) et $g:]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(x_0) = y_0$ et

$$g'(x_0) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)} = - \frac{2x_0}{2y_0} \Rightarrow g'(x_0) = - \frac{x_0}{y_0}$$

De plus, l'équation de la droite tangente à la courbe $y = g(x)$

au point (x_0, y_0) est :

$$y = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y = y_0 - \frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$$

Remarque.

On a un résultat analogue si $(x_0, y_0) \in U$ est tel que :

- $F(x_0, y_0) = 0$
- $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$

alors il existe $\varepsilon > 0$ et une fonction $h:]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que

- $x_0 = h(y_0)$
- $F(h(y), y) = 0$ pour tout $y \in]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[$

De plus

$$h'(y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(h(y), y)}{\frac{\partial F}{\partial x}(h(y), y)}$$

et

$$h'(y_0) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}$$

Exemple.

Considérons $F(x,y) = x^3 + xy + y^3 - 11$, fonction de classe C^1 .

On a $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + y$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x + 3y^2$

Comme $F(2,1) = 2^3 + 2 + 1 - 11 = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(2,1) = 2 + 3 = 5 \neq 0$,

il existe $\varepsilon > 0$ et $g:]2-\varepsilon, 2+\varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(2) = 1$

et $F(x, g(x)) = 0$. De plus, $g'(2) = -\frac{3 \cdot 2^2 + 1}{2 + 3 \cdot 1^2} = -\frac{13}{5}$

Ainsi, l'équation de la droite tangente à g au point $(2,1)$

au point $(2,1)$ est $y = 1 - \frac{13}{5}(x-2) \Leftrightarrow y = -\frac{13}{5}x + \frac{31}{5}$

Comme $\frac{\partial F}{\partial x}(2,1) = 12 + 1 = 13 \neq 0$, nous avons aussi une fonction

$h:]1-\delta, 1+\delta[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $h(1) = 2$, $F(h(y), y) = 0$ et $h'(1) = -\frac{5}{13}$

Théorème (des fonctions implicites). (cas $n=3$)

Soit $U \subset \mathbb{R}^3$ un ensemble ouvert.

Soit $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 .

Soit $(x_0, y_0, z_0) \in U$ tel que :

- $F(x_0, y_0, z_0) = 0$
- $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

alors il existe $\varepsilon > 0$ et une fonction $g: B((x_0, y_0), \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que

- $z_0 = g(x_0, y_0)$
- $F(x, y, g(x, y)) = 0$ pour tout $(x, y) \in B((x_0, y_0), \varepsilon)$

De plus,
$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))} \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))} \end{cases}$$

En particulier, pour $(x, y) = (x_0, y_0)$ on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)} \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)} \end{cases}$$

Ainsi, nous pouvons calculer les dérivées partielles de g sans avoir une expression explicite pour g .

Résultats analogues pour $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ ou $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$