3.9. Points d'extremum global (ou absolu)

Définition. Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

- Un point $(x_0, y_0) \in D(f)$ est un *point de maximum global de f* si
$$f(x_0, y_0) \geqslant f(x, y) \qquad \text{pour tout } (x, y) \in D(f).$$
On dit que $f(x_0, y_0)$ est le *maximum global de f*.

- Un point $(x_0, y_0) \in D(f)$ est un *point de maximum global strict de f* si
$$f(x_0, y_0) > f(x, y) \qquad \text{pour tout } (x, y) \in D(f).$$
On dit que $f(x_0, y_0)$ est le *maximum global strict de f*.

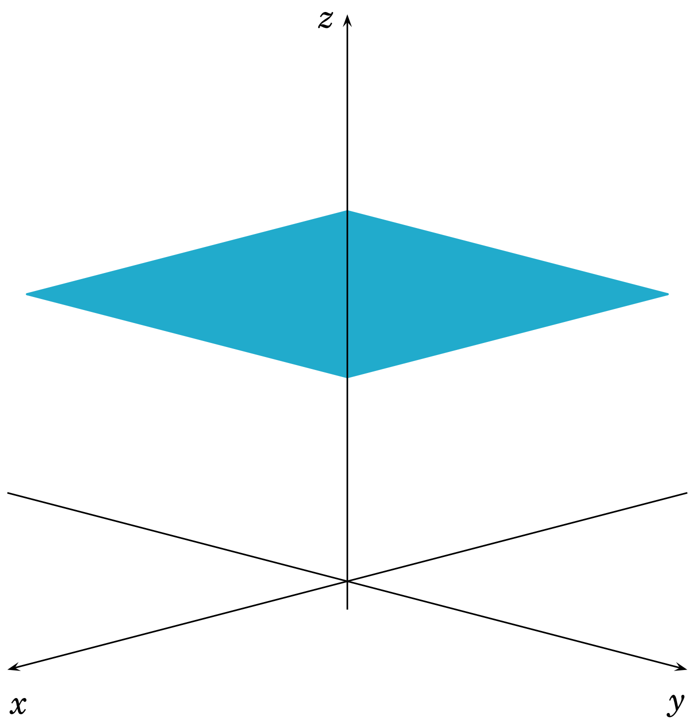
- Un point $(x_0, y_0) \in D(f)$ est un *point de minimum global de f* si
$$f(x_0, y_0) \leqslant f(x, y) \qquad \text{pour tout } (x, y) \in D(f).$$
On dit que $f(x_0, y_0)$ est le *minimum global de f*.

- Un point $(x_0, y_0) \in D(f)$ est un *point de minimum global strict de f* si
$$f(x_0, y_0) < f(x, y) \qquad \text{pour tout } (x, y) \in D(f).$$
On dit que $f(x_0, y_0)$ est le *minimum global strict de f*.

- Un point $(x_0, y_0) \in D(f)$ est un *point d'extremum global de f* s'il est un point de minimum global ou un point de maximum global.

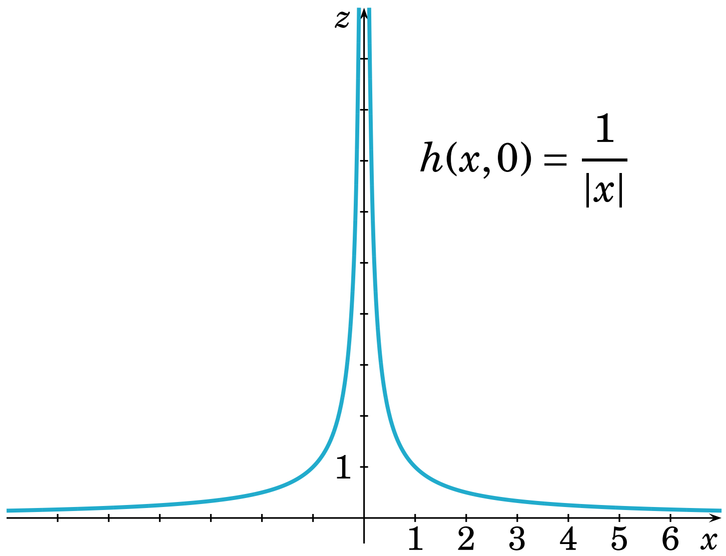
Exemples

1. Tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est un point de maximum global et un point de minimum global de la fonction constante $f(x, y) = c$.

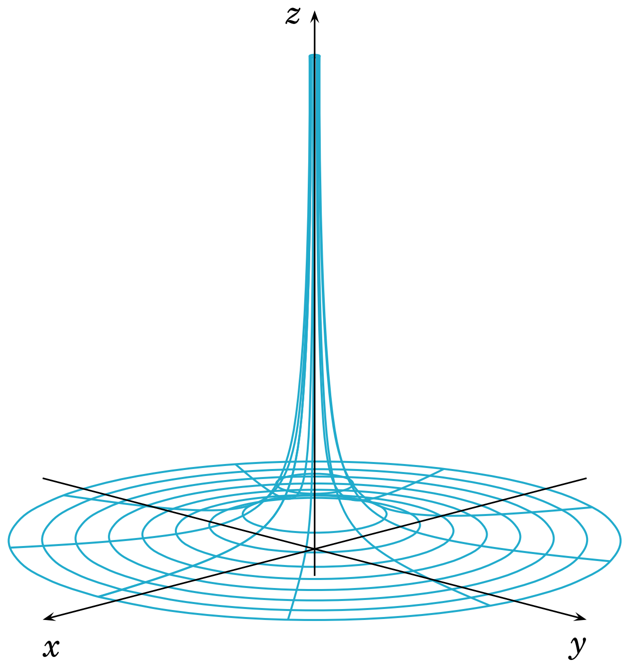


Graphe de f

2. La fonction $h(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ n'a pas de points d'extremum global.



Coupe du graphe de h en $y = 0$



Esquisse du graphe de h

Existence de points d'extremum global

Rappel. Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est une *fonction continue* définie sur l'*intervalle fermé* $[a,b]$, alors la fonction f possède (au moins) un point de maximum global et (au moins) un point de minimum global.

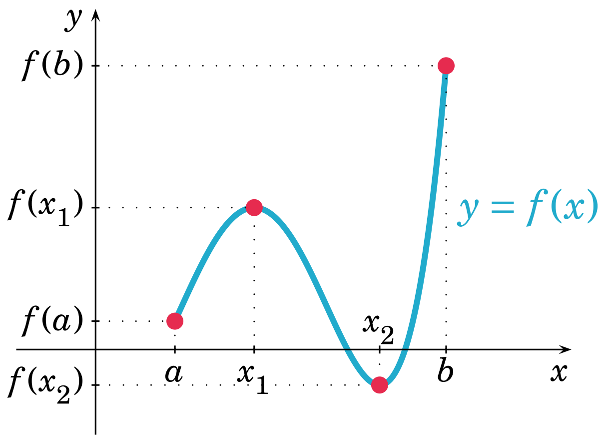
Dans ce cas, les points d'extremum global sont à chercher parmi :

- les points $x_0 \in \,]a,b[$ où $f'(x_0)=0$,
- les points $x_0 \in \,]a,b[$ où $f'(x_0)$ n'existe pas,
- les points du bord de l'intervalle, à savoir $x=a$ et $x=b$.

Par exemple, la fonction f esquissée ci-dessous possède deux points stationnaires (x_1 et x_2).

– x_2 est un point de minimum global de f

– b est un point de maximum global de f



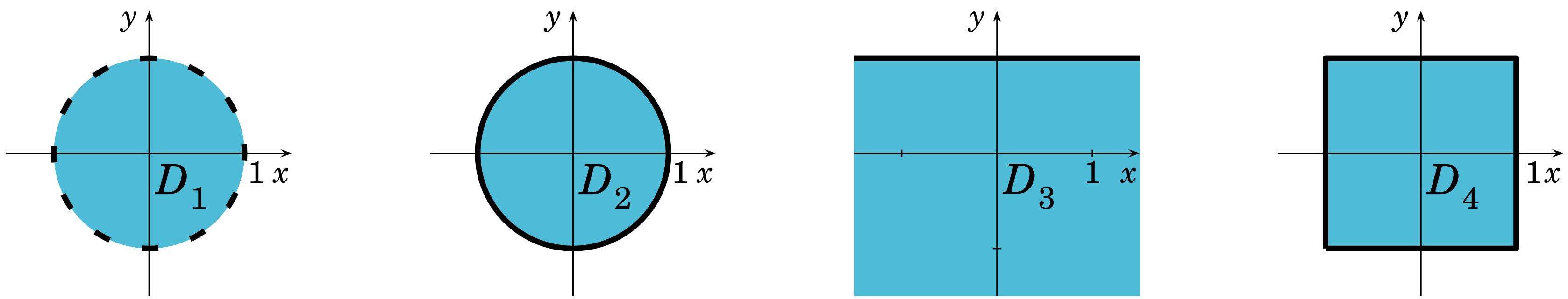
Question. Quel est l'analogue d'intervalle fermé $[a,b] \subset \mathbb{R}$ lorsque nous considérons des domaines de $\mathbb{R}^n$?

Rappel.

- Un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ est *fermé* s'il contient son bord.
- Un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ est *borné* s'il peut être contenu dans une boule de rayon fini centrée à l'origine.
- Un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ est *compact* s'il est fermé et borné.

Exemples

1. $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ est un domaine ouvert et borné.
2. $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ est un domaine fermé et borné.
3. $D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leqslant 1\}$ est un domaine fermé mais non borné.
4. $D_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leqslant x \leqslant 1,\ -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ est un domaine fermé et borné.



Théorème 3. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables avec $D \subset \mathbb{R}^2$ fermé et borné. Si f est continue, alors f possède (au moins) un point de maximum global et (au moins) un point de minimum global.

Conséquence. En faisant appel aux théorèmes 1 et 3, nous pouvons montrer que toute fonction différentiable de deux variables définie sur un domaine D fermé et borné atteint nécessairement son maximum global et son minimum global en

- un point stationnaire,
- un point de ∂D, le bord du domaine D.

Méthode pour déterminer les points d'extremum global d'une fonction différentiable de deux variables sur un domaine D fermé et borné

a) Dresser la liste des points stationnaires de f se trouvant dans D.

b) Déterminer les points sur le bord de D susceptibles de donner un extremum.

c) Evaluer la fonction f en chaque point trouvé dans a) – b)

- la plus grande valeur M est le maximum global de f sur D,
- la plus petite valeur m est le minimum global de f sur D

et nous avons

$$m \leqslant f(x,y) \leqslant M \qquad \text{pour tout } (x,y) \in D.$$

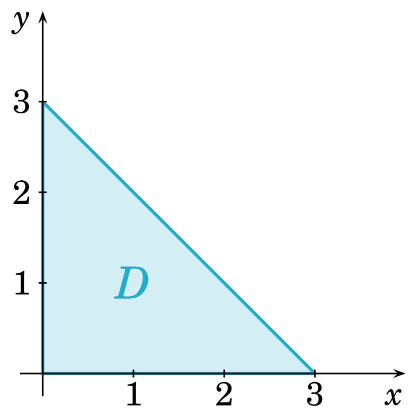
Exemples

Déterminer les points d'extremum global des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - x - y$ restreinte au domaine

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant 3\}$$

(domaine délimité par les droites $x = 0$, $y = 0$ et $y = 3 - x$).



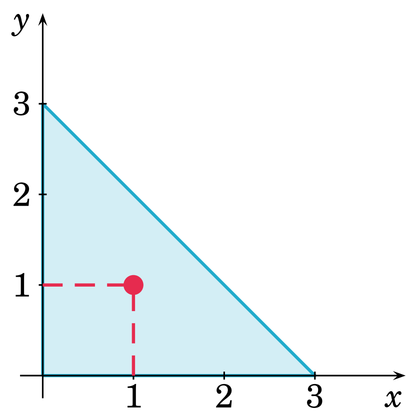
a) *Points stationnaires :*

Comme $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - y - 1$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x + 2y - 1$ sont des fonctions continues, f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Les points stationnaires de f satisfont

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 & (1) \\ -x + 2y - 1 = 0 & (2) \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - 3 = 0 & 2(1) + (2) \\ 3y - 3 = 0 & (1) + 2(2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

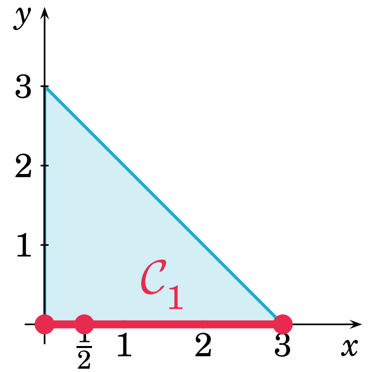


Nous avons donc un seul point stationnaire :

$$(1,1) \in D\,.$$

b) *Points du bord :* nous allons regarder les trois côtés du triangle séparément :

$\boxed{\mathcal{C}_1 : y = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 3}$

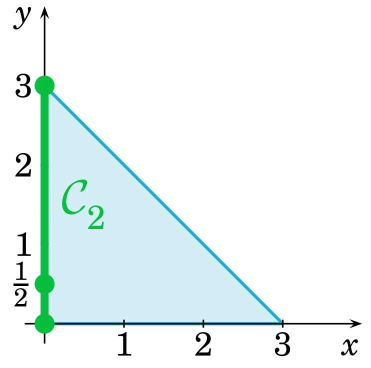


Ici $f(x,0) = x^2 - x = g(x)$, avec $x \in [0,3]$.

Comme $g'(x) = 2x - 1$ s'annule en $x = \frac{1}{2}$, il y a trois candidats sur $\mathcal{C}_1$:

$$\left(\tfrac{1}{2}, 0\right),\ (0,0),\ (3,0)$$

$\boxed{\mathcal{C}_2 : x = 0,\ 0 \leqslant y \leqslant 3}$

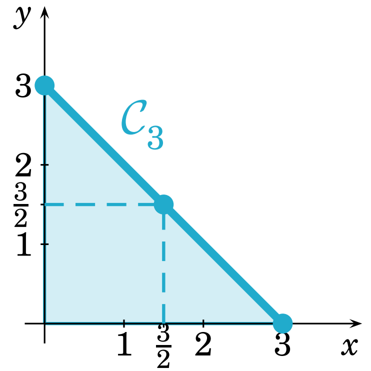


Ici $f(0,y) = y^2 - y = g(y)$, avec $y \in [0,3]$.

Comme $g'(y) = 2y - 1$ s'annule en $y = \frac{1}{2}$, il y a trois candidats sur $\mathcal{C}_2$:

$$\left(0, \tfrac{1}{2}\right),\ (0,0),\ (0,3)$$

$\boxed{\mathcal{C}_3 : y = -x + 3,\ 0 \leqslant x \leqslant 3}$

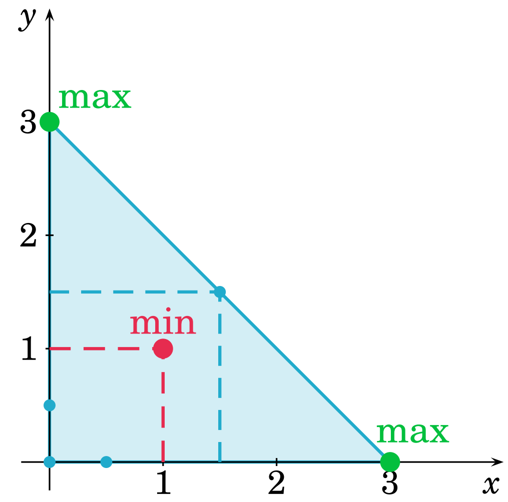


$$\begin{aligned} \text{Ici } f(x, -x+3) &= x^2 - x(-x+3) + (-x+3)^2 - x - (-x+3) \\ &= 3x^2 - 9x + 6 = h(x) \qquad \text{avec } x \in [0,3] \end{aligned}$$

Comme $h'(x) = 6x - 9$ s'annule en $x = \frac{3}{2}$ et $-\frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{2}$, il y a trois candidats sur $\mathcal{C}_3$:

$$\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\right),\ (0,3),\ (3,0)$$

c) *Evaluation :*



$$f(1,1) = 1-1+1-1-1 = -1 \qquad \text{(minimum global)}$$

$$f(0,0) = 0-0+0-0-0 = 0$$

$$f\left(\tfrac{1}{2},0\right) = \tfrac{1}{4}-0+0-\tfrac{1}{2}-0 = -\tfrac{1}{4}$$

$$f(3,0) = 9-0+0-3-0 = 6 \qquad \text{(maximum global)}$$

$$f\left(0,\tfrac{1}{2}\right) = 0-0+\tfrac{1}{4}-0-\tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{4}$$

$$f(0,3) = 0-0+9-0-3 = 6 \qquad \text{(maximum global)}$$

$$f\left(\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{9}{4}-\tfrac{9}{4}+\tfrac{9}{4}-\tfrac{3}{2}-\tfrac{3}{2} = -\tfrac{3}{4}$$

Par conséquent,

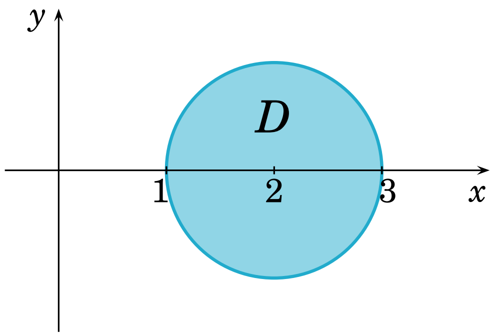
- $(1,1)$ est un point de minimum global de f
- $(3,0)$ et $(0,3)$ sont des points de maximum global de f

De plus,

$$-1 \leqslant f(x,y) \leqslant 6 \qquad \text{pour tout } (x,y) \in D\,.$$

2. $h(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ (distance à l'origine) restreinte au domaine

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-2)^2+y^2\leqslant 1\}.$$



Géométriquement nous nous attendons à trouver :

- point de minimum global de h : $(1,0)$
- point de maximum global de h : $(3,0)$

Remarque. Nous allons étudier la fonction différentiable $f(x,y)=x^2+y^2$ car cela va simplifier les calculs *sans* changer le résultat.

Comme $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y$, le seul point stationnaire de f est $(0,0)\notin D$.

Par conséquent, les points d'extremum de f sur le domaine D sont à chercher sur le bord de D, le cercle de rayon 1 et centre $(2,0)$. Nous avons :

$$(x-2)^2+y^2=1 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2-4x+4+y^2=1 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2+y^2=4x-3$$

Ainsi, sur le cercle, la fonction à étudier est

$$g(x)=4x-3, \qquad \text{avec } x\in[1,3].$$

Comme $g'(x)=4\neq 0$, les seuls candidats à point d'extremum de g sont les points du bord de $[1,3]$, à savoir $x=1$ et $x=3$. Les candidats pour f (et h) sont donc $(1,0)$ et $(3,0)$.

Comme $h(1,0)=1$ et $h(3,0)=3$, le point de minimum global de h est $(1,0)$ et le point de maximum global de h est $(3,0)$, comme attendu. De plus,

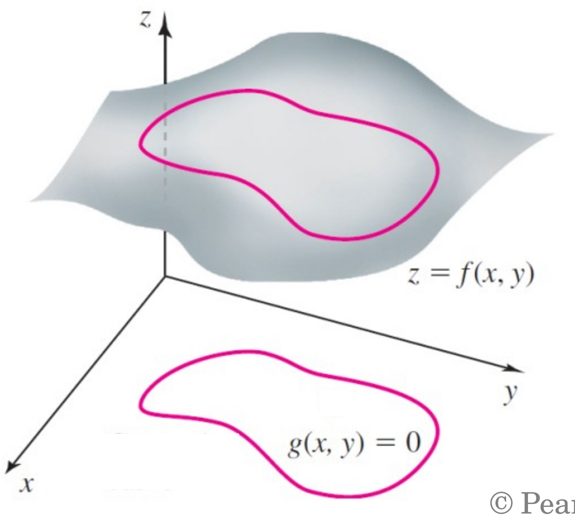
$$1\leqslant h(x,y)\leqslant 3, \qquad \text{pour tout } (x,y)\in D.$$

3.10. La méthode des multiplicateurs de Lagrange

Problème : Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

Nous voulons trouver les points d'extremum $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ de f qui satisfont la *contrainte*

$$g(x_0, y_0) = 0.$$



Autrement dit, trouver les points (x_0, y_0) sur la courbe de niveau 0 de la fonction g :

$$L_g(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$$

tels que

$$f(x_0, y_0) \geqslant f(x, y) \quad (\text{ou } f(x_0, y_0) \leqslant f(x, y)), \qquad \text{pour tout } (x, y) \in L_g(0).$$

Application : Déterminer les points d'extremum de f sur le bord d'un domaine D.

Question : Comment trouver les points d'extremum $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ de f qui satisfont la contrainte $g(x_0, y_0) = 0$?

Une première approche consiste à résoudre $g(x, y) = 0$ pour obtenir y en fonction de x :

$$y = G(x)$$

et chercher ensuite les points d'extremum de la fonction d'une variable

$$h(x) = f\big(x, G(x)\big).$$

Alternativement, nous pouvons résoudre $g(x, y) = 0$ pour obtenir x en fonction de y :

$$x = G(y)$$

et chercher ensuite les points d'extremum de la fonction d'une variable

$$h(y) = f\big(G(y), y\big).$$

Plus généralement, nous pouvons essayer de trouver une paramétrisation

$$\vec{\varphi}(t) = \big(x(t), y(t)\big), \qquad \text{avec } t \in [a, b],$$

de la courbe $L_g(0)$ et chercher ensuite les points d'extremum de la fonction

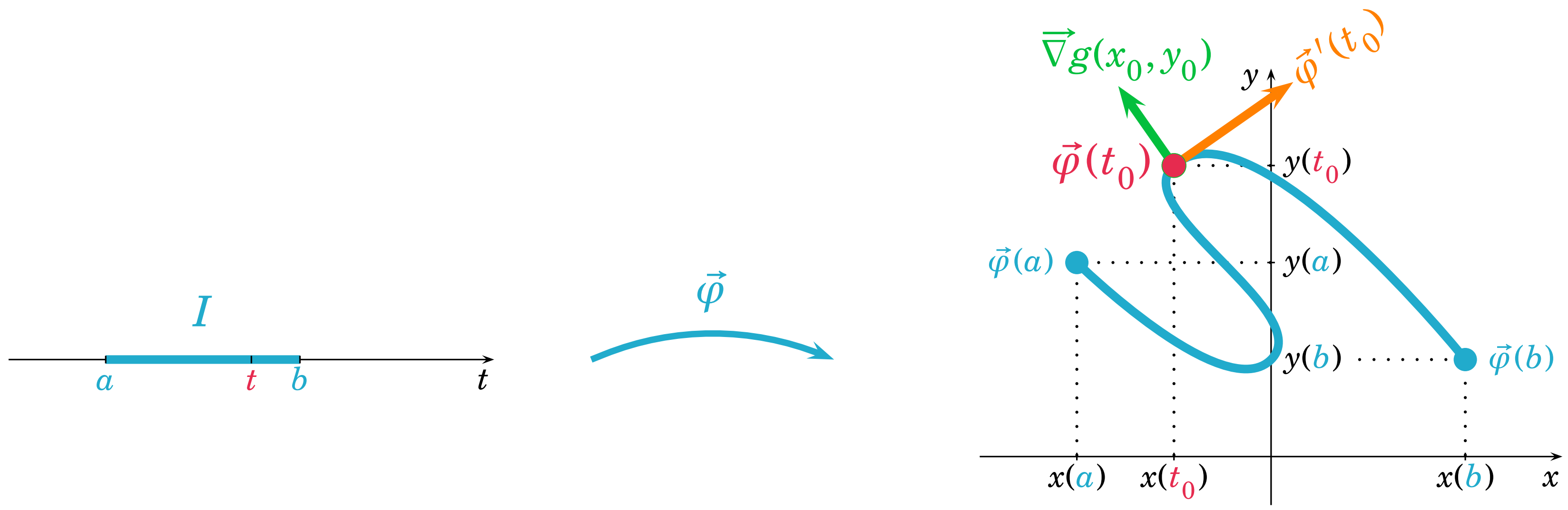
$$h(t) = f\big(\vec{\varphi}(t)\big) = (f \circ \vec{\varphi})(t) = f\big(x(t), y(t)\big), \qquad \text{avec } t \in [a, b].$$

Malheureusement, dans beaucoup de situations ces approches ne sont pas possibles.

Rappel. Nous avons vu que lorsqu'une fonction g est différentiable en $(x_0, y_0) \in D(g)$ et que la courbe de niveau de g qui passe par (x_0, y_0) possède une paramétrisation $\vec{\varphi} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ autour de (x_0, y_0) telle que

$$\vec{\varphi}(t_0) = (x_0, y_0), \qquad \text{avec } t_0 \in]a, b[$$

est régulière en t_0, alors le vecteur tangent $\vec{\varphi}\,'(t_0)$ ne s'annule pas et le vecteur $\vec{\nabla} g(x_0, y_0)$ existe et est orthogonal à la courbe de niveau de g qui passe par le point (x_0, y_0) :



Remarque. Une condition nécessaire pour que le point $\vec{\varphi}(t_0) = (x_0, y_0)$, avec $t_0 \in]a, b[$ soit un point d'extremum de la fonction f sur la courbe $L_g(0)$ est

$$(f \circ \vec{\varphi})'(t_0) = 0\,.$$

Autrement dit

$$\vec{\varphi}\,'(t_0) \cdot \vec{\nabla} f(x_0, y_0) = 0\,. \tag{$\star$}$$

Idée (Lagrange, 1788)

L'équation ($\star$) nous dit que si (x_0, y_0) est un point d'extremum de f sur la courbe $L_g(0)$ alors les vecteurs $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ et $\vec{\varphi}\,'(t_0)$ sont orthogonaux.

Comme par construction $\vec{\nabla} g(x_0, y_0)$ est lui aussi orthogonal au vecteur tangent $\vec{\varphi}\,'(t_0)$ (car $L_g(0)$ est la courbe de niveau 0 de la fonction g), les vecteurs $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ et $\vec{\nabla} g(x_0, y_0)$ doivent être parallèles.

Supposons que $\vec{\nabla} g(x_0, y_0)$ existe et soit non nul. Il existe alors un nombre réel λ tel que

$$\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \lambda \vec{\nabla} g(x_0, y_0)\,.$$

Le nombre λ est appelé *multiplicateur de Lagrange*.

La condition nécessaire pour que (x_0, y_0) soit un point d'extremum sur $L_g(0)$ s'écrit

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \tag{$\star\star$}$$

Nous avons donc à résoudre un système de trois équations à trois inconnues x_0, y_0 et λ.

En introduisant la *fonction de Lagrange $\mathcal{L}$* :

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y),$$

le système d'équations $(\star\star)$ devient

$$\overrightarrow{\nabla}\mathcal{L}(x_0, y_0, \lambda) = (0, 0, 0).$$

De ce fait, la recherche de candidats à point d'extremum sous contrainte d'une fonction de deux variables se ramène tout simplement à la recherche de points stationnaires d'une fonction de trois variables.

Remarques.

- Pour pouvoir utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange, il faut commencer par vérifier que $\vec{\nabla} g(x_0, y_0)$ existe et est non nul pour tout $(x_0, y_0) \in L_g(0)$.
- La méthode des multiplicateurs de Lagrange nous fournit des candidats. Elle ne nous dit pas que si $(\star\star)$ est satisfait alors (x_0, y_0) est forcément un point d'extremum de f sous la contrainte $g(x_0, y_0) = 0$.
- La méthode des multiplicateurs de Lagrange se généralise à la recherche de points d'extremum de fonctions de $n \geqslant 2$ variables sous $k \geqslant 1$ contraintes, où il faut résoudre un système de $n + k$ équations avec $n + k$ inconnues.

  Par exemple,

  $$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) - \lambda_1 g_1(x, y, z) - \lambda_2 g_2(x, y, z)$$

  est la fonction de Lagrange associée à la fonction de trois variables f sous les contraintes

  $$g_1(x, y, z) = 0 \qquad \text{et} \qquad g_2(x, y, z) = 0.$$

Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Pour trouver les points d'extremum de la fonction f sous la contrainte $g(x,y)=0$:

1. Construire une nouvelle fonction, la *fonction de Lagrange* :

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\, g(x,y).$$

2. Calculer les dérivées partielles de $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,\lambda) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \lambda\, \frac{\partial g}{\partial x}(x,y),\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,\lambda) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \lambda\, \frac{\partial g}{\partial y}(x,y),\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) &= -g(x,y).
\end{aligned}$$

3. Déterminer les points stationnaires de $\mathcal{L}$:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)\\[2ex]
\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lambda\, \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\\[2ex]
g(x_0,y_0) = 0
\end{cases} \tag{$\star$}$$

Exemples

1. Déterminer les points d'extremum de la fonction

$$f(x,y) = x + y$$

sous la contrainte $x^2 + y^2 = 2$ (cercle de rayon $\sqrt{2}$ centré à l'origine).

Soit $g(x,y) = x^2 + y^2 - 2$ la fonction contrainte.

Comme $\overrightarrow{\nabla} g(x,y) = (2x, 2y)$ s'annule en $(x,y) = (0,0)$ et $g(0,0) = -2 \neq 0$, nous pouvons utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Considérons la fonction de Lagrange

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x + y - \lambda\left(x^2 + y^2 - 2\right).$$

Comme :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,\lambda) = 1 - 2\lambda x, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,\lambda) = 1 - 2\lambda y, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = -\left(x^2 + y^2 - 2\right),$$

les points stationnaires de $\mathcal{L}$ satisfont :

$$\begin{cases} 1 - 2\lambda x = 0 & (1) \\ 1 - 2\lambda y = 0 & (2) \\ x^2 + y^2 = 2 & (3) \end{cases}$$

La soustraction de la première équation par la deuxième nous donne

$$-2\lambda x + 2\lambda y = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2\lambda(y-x) = 0$$

et cette équation est satisfaite si $y = x$ ou si $\lambda = 0$.

- Si $y = x$, la troisième équation devient $2x^2 = 2$, d'où $x = -1$ ou $x = 1$.
- Si $\lambda = 0$, la première équation devient $1 = 0$, ce qui est impossible.

Nous avons donc deux candidats :

$$(-1,-1) \quad \text{et} \quad (1,1)$$

Comme

$$f(-1,-1) = -1-1 = -2$$
$$f(1,1) = 1+1 = 2$$

la fonction f est maximale en $(1,1)$ et minimale en $(-1,-1)$. De plus,

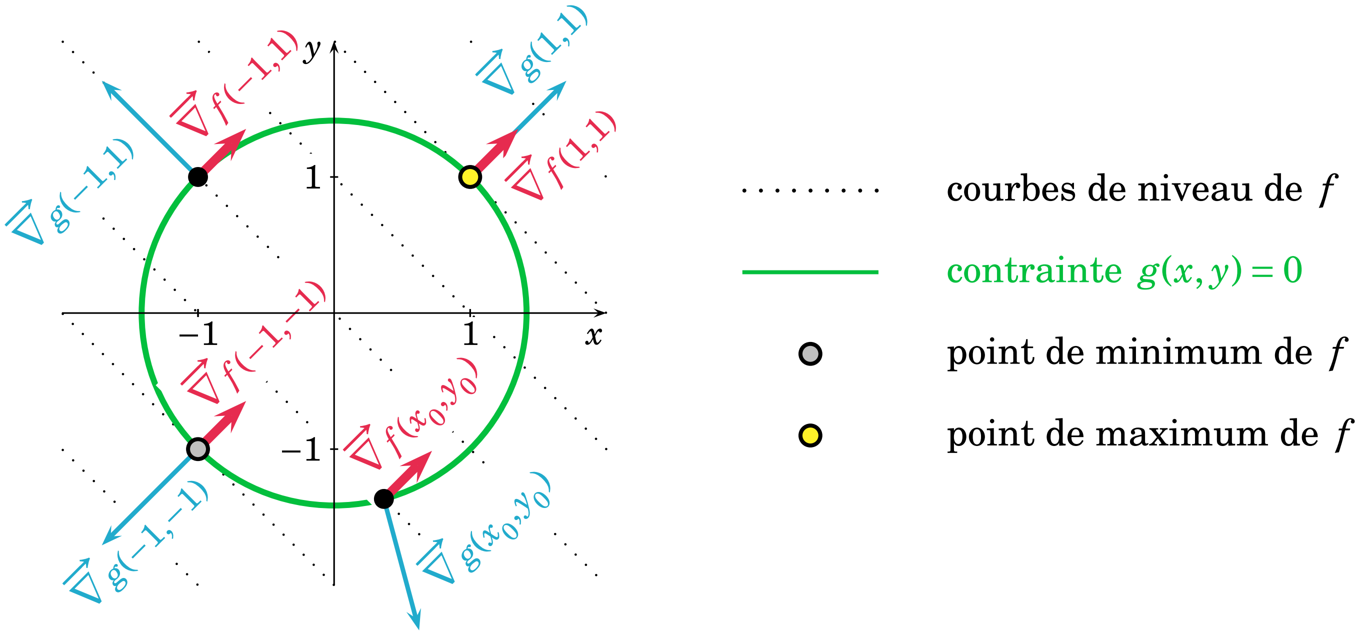
$$-2 \leqslant f(x,y) \leqslant 2 \qquad \text{pour tout } (x,y) \text{ sur le cercle } x^2+y^2 = 2.$$

Remarque 1. La courbe de niveau c de la fonction f est la droite d'équation $y = -x+c$.

Comme le gradient de f

$$\vec{\nabla} f(x,y) = (1,1) \qquad \text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

est parallèle à $\vec{\nabla} g(x,y) = (2x,2y)$ lorsque $y = x$, nous retrouvons donc les points $(1,1)$ et $(-1,-1)$.



Remarque 2. Dans ce cas, il est aussi possible d'utiliser une paramétrisation du cercle d'équation $x^2+y^2=2$. Par exemple,

$$\vec{\varphi}(t)=\left(\sqrt{2}\cos(t),\ \sqrt{2}\sin(t)\right), \qquad \text{avec } t\in[0,2\pi].$$

Ainsi, la fonction d'une variable à étudier est

$$h(t)=f\left(\vec{\varphi}(t)\right)=\sqrt{2}\cos(t)+\sqrt{2}\sin(t), \qquad \text{avec } t\in[0,2\pi].$$

Comme $h'(t)=-\sqrt{2}\sin(t)+\sqrt{2}\cos(t)$ s'annule lorsque $t=\dfrac{\pi}{4}$ ou $t=\dfrac{5\pi}{4}$, nous retrouvons les points $(1,1)$ et $(-1,-1)$.

2. Déterminer les points d'extremum de la fonction

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

sous la contrainte $(x-2)^2 + y^2 = 1$.

Soit $g(x,y) = (x-2)^2 + y^2 - 1$ la fonction contrainte.

Comme $\overrightarrow{\nabla} g(x,y) = \big(2(x-2), 2y\big)$ s'annule en $(x,y) = (2,0)$ et $g(2,0) = -1 \neq 0$, nous pouvons utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Soit

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - \lambda\big((x-2)^2 + y^2 - 1\big).$$

Comme :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,\lambda) = 2x - 2\lambda(x-2), \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,\lambda) = 2y - 2\lambda y, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = -\big((x-2)^2 + y^2 - 1\big),$$

les points stationnaires de $\mathcal{L}$ satisfont :

$$\begin{cases} x - \lambda(x-2) = 0 & (1) \\ y(1-\lambda) = 0 & (2) \\ (x-2)^2 + y^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

La deuxième équation est satisfaite si $y = 0$ ou si $\lambda = 1$.

- Si $y = 0$, la troisième équation devient $(x-2)^2 = 1$, d'où $x = 1$ et $x = 3$.
- Si $\lambda = 1$, la première équation devient $x - (x-2) = 0$, d'où $2 = 0$, ce qui est impossible.

Nous retrouvons donc les deux candidats trouvés précédemment, à savoir $(1,0)$ et $(3,0)$.