Interprétation géométrique

Rappel : Nous avons $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\alpha)$, où α l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Soit f une fonction différentiable en (x_0, y_0).

- Soit (x_0, y_0) tel que $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = (0, 0)$.

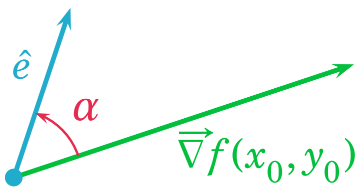
  Dans ce cas nous avons :

$$D_{\hat{e}} f(x_0, y_0) = \hat{e} \cdot \vec{\nabla} f(x_0, y_0) \qquad \Longrightarrow \qquad D_{\hat{e}} f(x_0, y_0) = 0 \qquad \text{pour toute direction } \hat{e}.$$

- Soit (x_0, y_0) tel que $\overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0) \neq (0,0)$.

  Dans ce cas nous avons :

$$D_{\hat{e}} f(x_0, y_0) = \hat{e} \cdot \overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0) \qquad \Longrightarrow \qquad D_{\hat{e}} f(x_0, y_0) = \left\| \overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0) \right\| \cos(\alpha)$$



  Comme $-1 \leqslant \cos(\alpha) \leqslant 1$ alors

$$-\left\| \overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0) \right\| \leqslant D_{\hat{e}} f(x_0, y_0) \leqslant \left\| \overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0) \right\|$$

  - Si $\alpha = 0$, alors $D_{\hat{e}} f(x_0, y_0) = \left\| \overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0) \right\|$ est maximale.
  - Si $\alpha = \pi$, alors $D_{\hat{e}} f(x_0, y_0) = -\left\| \overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0) \right\|$ est minimale.
  - Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, alors $D_{\hat{e}} f(x_0, y_0) = 0$.
  - Si $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$, alors $D_{\hat{e}} f(x_0, y_0) > 0$ et la fonction est croissante dans la direction $\hat{e}$.
  - Si $\frac{\pi}{2} < \alpha \leqslant \pi$, alors $D_{\hat{e}} f(x_0, y_0) < 0$ et la fonction est décroissante dans la direction $\hat{e}$.

  Ainsi, la croissance de la fonction est maximale dans la direction du gradient et minimale dans la direction opposée.

Exemples

1. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

Le calcul nous donne

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right),$$

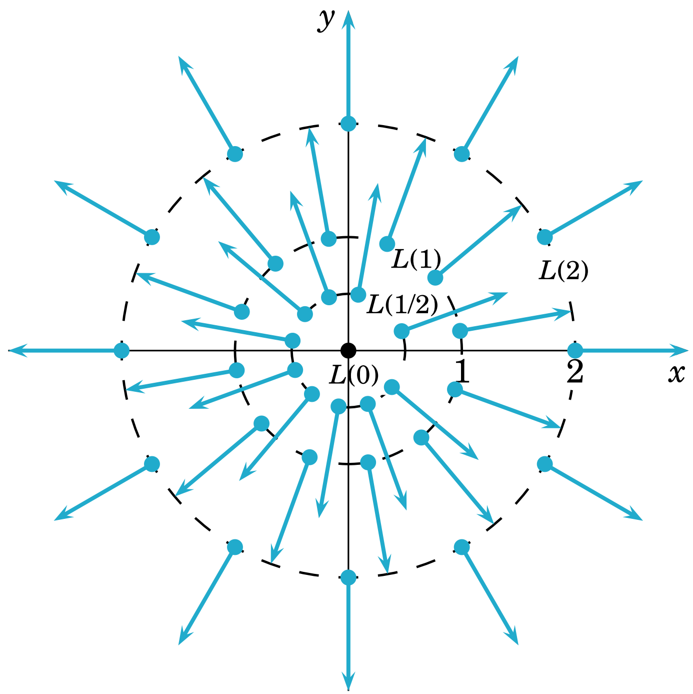
avec $(x,y) \neq (0,0)$.

Ainsi, la croissance de f à partir de $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ se fait dans la direction radiale.

De plus, comme

$$\|\vec{\nabla} f(x,y)\| = 1 \qquad \text{pour tout } (x,y) \neq (0,0),$$

la croissance ne dépend pas de la position du point.



Courbes de niveau et gradients pour f

2. $g(x,y) = x^2 + y^2$

Le calcul nous donne

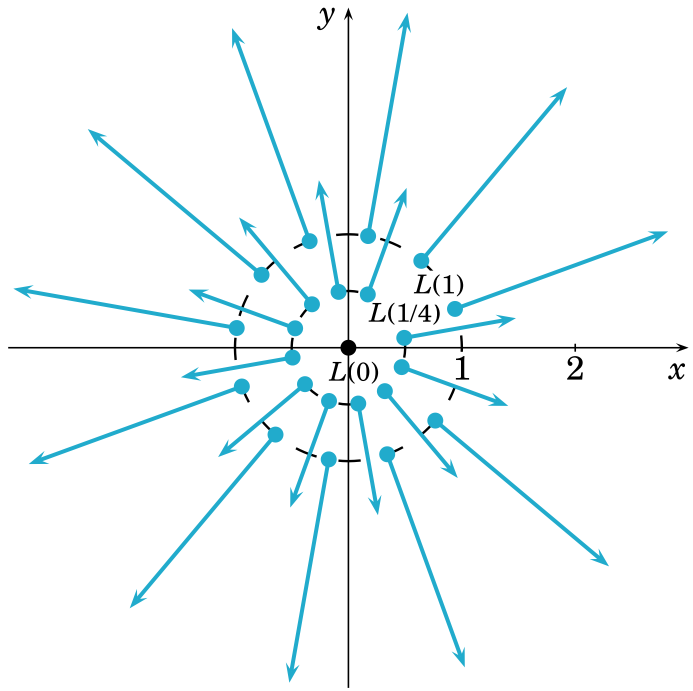
$$\overrightarrow{\nabla} g(x,y) = (2x, 2y) \qquad \text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ainsi, la croissance de g à partir de $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ se fait dans la direction radiale.

De plus, comme

$$\left\|\overrightarrow{\nabla} g(x,y)\right\| = 2\sqrt{x^2+y^2} = 2\sqrt{g(x,y)},$$

cette croissance est proportionnelle à la distance à l'origine.



Courbes de niveau et gradients pour g

3. $h(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Le calcul nous donne

$$\vec{\nabla}h(x,y)=\left(-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,,-\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right),$$

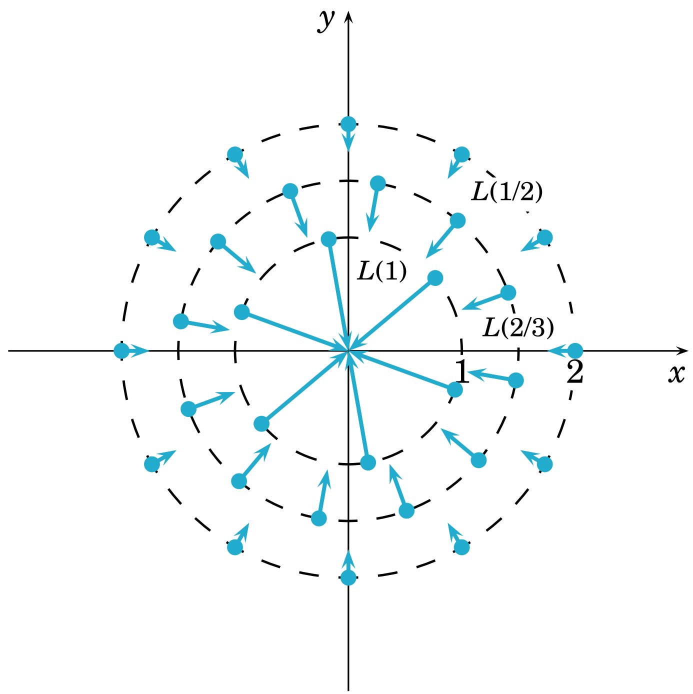
avec $(x,y)\neq(0,0)$.

Ainsi, la croissance de h à partir de $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ se fait dans la direction de l'origine.

De plus, comme

$$\left\|\vec{\nabla}h(x,y)\right\|=\frac{1}{x^2+y^2}=\big(h(x,y)\big)^2,$$

cette croissance est inversément proportionnelle à la distance à l'origine.



Courbes de niveau et gradients pour h

3.8. Points d'extremum local (ou relatif)

Rappel : Points d'extremum local d'une fonction d'une variable

Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable et soit $x_0 \in D(f)$.

- On dit que x_0 est un *point de maximum local de f* si
$$f(x_0) \geqslant f(x) \qquad \text{pour tout } x \text{ dans un voisinage de } x_0.$$
On dit que $f(x_0)$ est un *maximum local de f*.
- On dit que x_0 est un *point de minimum local de f* si
$$f(x_0) \leqslant f(x) \qquad \text{pour tout } x \text{ dans un voisinage de } x_0.$$
On dit que $f(x_0)$ est un *minimum local de f*.
- On dit que x_0 est un *point d'extremum local de f* s'il est un point de minimum local ou un point de maximum local.
- On dit que x_0 est un *point stationnaire de f* si $f'(x_0) = 0$.

Théorème (Fermat). Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable et soit $x_0 \in D(f)$.
Si x_0 est un point d'extremum local de f tel que $f'(x_0)$ existe, alors $f'(x_0) = 0$.

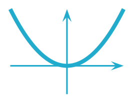
Conséquence : Si $f : D(f) \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable, alors les points d'extremum local de f sont donc à chercher parmi les points stationnaires de f.

Attention : Si $f : D(f) \to \mathbb{R}$ est une fonction d'une variable dérivable en $x_0 \in D(f)$, le fait que $f'(x_0) = 0$ ne garantit pas que x_0 soit un point d'extremum local de f.
Par exemple, la fonction $f(x) = x^3$ est telle que $f'(0) = 0$ mais dans ce cas, x_0 n'est pas un point d'extremum local de f, mais un point d'inflexion de f.

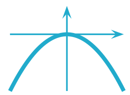
Test de la dérivée seconde

Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable et soit $x_0 \in D(f)$ tel que $f'(x_0) = 0$. Supposons de plus que f est deux fois continûment dérivable sur un intervalle ouvert contenant x_0.

1. Si $f''(x_0) > 0$, alors x_0 est un point de minimum local de f.



2. Si $f''(x_0) < 0$, alors x_0 est un point de maximum local de f.



Points d'extremum local d'une fonction de deux variables

Définition. Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

- Un point $(x_0, y_0) \in D(f)$ est un *point de maximum local de f* si
$$f(x_0, y_0) \geqslant f(x, y) \qquad \text{pour tout } (x, y) \text{ dans un voisinage de } (x_0, y_0).$$
On dit que $f(x_0, y_0)$ est un *maximum local de f*.

- Un point $(x_0, y_0) \in D(f)$ est un *point de maximum local strict de f* si
$$f(x_0, y_0) > f(x, y) \qquad \text{pour tout } (x, y) \text{ dans un voisinage de } (x_0, y_0).$$
On dit que $f(x_0, y_0)$ est un *maximum local strict de f*.

- Un point $(x_0, y_0) \in D(f)$ est un *point de minimum local de f* si
$$f(x_0, y_0) \leqslant f(x, y) \qquad \text{pour tout } (x, y) \text{ dans un voisinage de } (x_0, y_0).$$
On dit que $f(x_0, y_0)$ est un *minimum local de f*.

- Un point $(x_0, y_0) \in D(f)$ est un *point de minimum local strict de f* si
$$f(x_0, y_0) < f(x, y) \qquad \text{pour tout } (x, y) \text{ dans un voisinage de } (x_0, y_0).$$
On dit que $f(x_0, y_0)$ est un *minimum local strict de f*.

- Un point $(x_0, y_0) \in D(f)$ est un *point d'extremum local de f* s'il est un point de minimum local ou un point de maximum local.

Détermination des points d'extremum local

Définition. Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. On dit que (x_0, y_0) est un *point stationnaire de* f si la fonction f est différentiable en $(x_0, y_0) \in D(f)$ et si

$$\overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0) = (0,0).$$

Dans ce cas, le plan tangent au graphe de f au point $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$ est horizontal :

$$z = f(x_0, y_0).$$

Théorème 1. Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables différentiable en (x_0, y_0). Si (x_0, y_0) est un point d'extremum local de f alors (x_0, y_0) est un point stationnaire de f.

Preuve. Supposons que (x_0, y_0) est un point d'extremum local de la fonction f. Comme par hypothèse f est différentiable en ce point, $\overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0)$ existe.

A voir : $\overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0) = (0,0)$.

Par hypothèse, la fonction $x \longmapsto f(x, y_0)$ possède un extremum local en x_0.

En utilisant le théorème sur les points d'extremum des fonctions d'une variable nous trouvons $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$.

De la même manière, étant donné que $y \longmapsto f(x_0, y)$ possède un extremum local en y_0 nous trouvons $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. ■

Conséquence : Si f est différentiable en (x_0, y_0) et si (x_0, y_0) *n'est pas* un point stationnaire de f, alors (x_0, y_0) *n'est pas* un point d'extremum local de f.
Par conséquent. si f est une fonction différentiable, alors les candidats à point d'extremum local de la fonction f sont à chercher parmi les points stationnaires de f.

Remarque. Le théorème se généralise au cas des fonctions de n variables, avec $n \geqslant 3$.

Exemple

La fonction différentiable $f(x, y) = x^2 + y^2$ est telle que

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \geqslant 0 = f(0, 0).$$

Par conséquent, f possède un point de minimum local en $(0, 0)$.
Etant donné que le gradient $\overrightarrow{\nabla} f(x, y) = (2x, 2y)$ est défini pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et s'annule en $(0, 0)$, le point $(0, 0)$ est bel et bien un point stationnaire.

Attention : Le théorème 1 *ne dit pas* que si (x_0, y_0) est un point stationnaire de f, alors (x_0, y_0) est forcément un point d'extremum local de f.

Considérons par exemple la fonction différentiable

$$f(x,y) = x^2 - y^2, \qquad \text{avec } D(f) = \mathbb{R}^2.$$

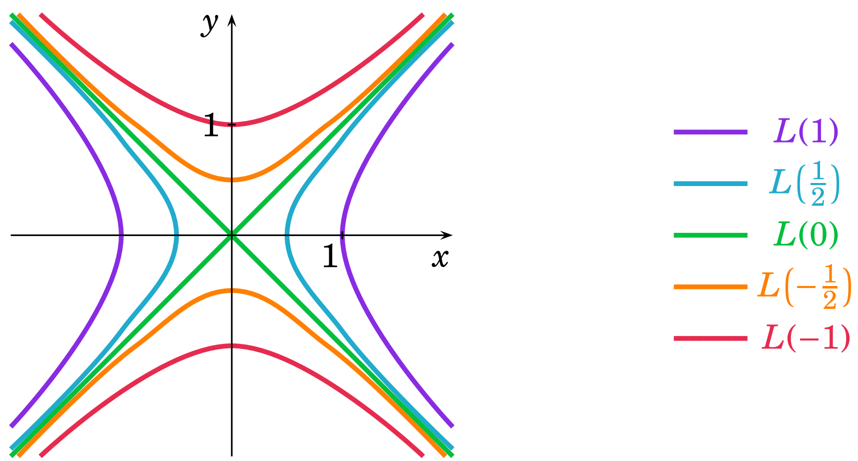
Comme le gradient $\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = (2x, -2y)$ est défini partout et

$$\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = (0,0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x,y) = (0,0),$$

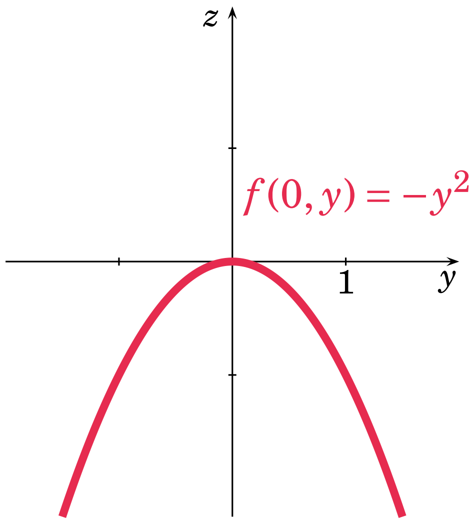
le seul point stationnaire de f est $(0,0)$. Nous pouvons montrer, à l'aide des courbes de niveau de f, que le point $(0,0)$ *n'est pas* un point d'extremum local de f. Nous avons

$$f(x,y) = c \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 - y^2 = c$$

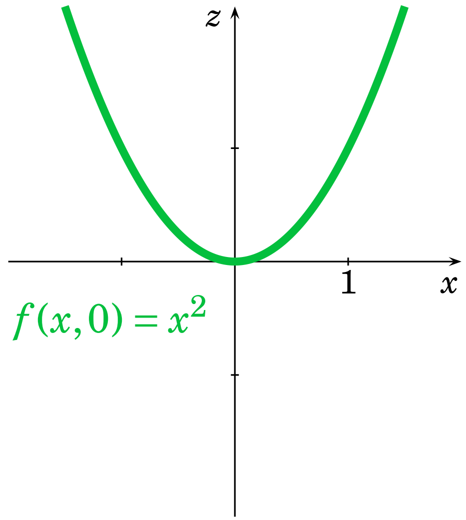
- Si $c = 0$, nous trouvons $y = \pm x$ (ensemble de deux droites).
- Si $c \neq 0$, nous trouvons $\dfrac{x^2}{c} - \dfrac{y^2}{c} = 1$ (hyperbole).



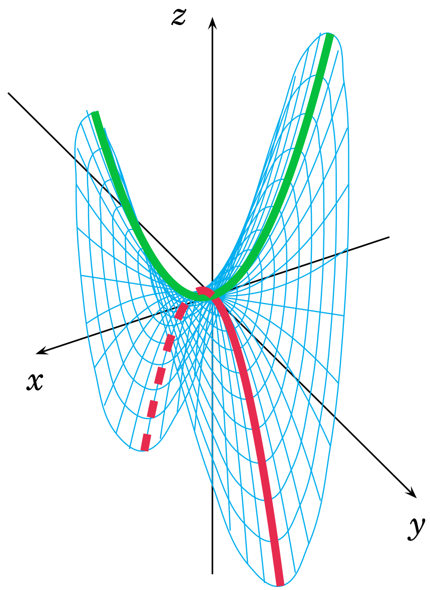
Quelques courbes de niveau de $f(x,y) = x^2 - y^2$



Coupe en $x = 0$



Coupe en $y = 0$



Esquisse du graphe de f

Définition. Soit $(x_0, y_0) \in D(f)$ un point stationnaire de f.
On dit que (x_0, y_0) est un *point selle de f* s'il est possible de trouver deux directions

$$\hat{e} = (e_1, e_2) \quad \text{et} \quad \hat{e}^* = (e_1^*, e_2^*)$$

telles que la fonction $t \longmapsto f(x_0 + te_1, y_0 + te_2)$ admet un point de maximum local en $t = 0$ alors que la fonction $t \longmapsto f(x_0 + te_1^*, y_0 + te_2^*)$ admet un point de minimum local en $t = 0$.

Exemple

Le point $(0,0)$ est un point selle de $f(x,y) = x^2 - y^2$.
En effet, il suffit de prendre $\hat{e} = (0,1)$ et $\hat{e}^* = (1,0)$.

Théorème 2. Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et soit (x_0, y_0) un point stationnaire de f. Supposons que les dérivées partielles de premier et deuxième ordre existent et sont continues au voisinage de (x_0, y_0). Soit

$$\mathcal{H}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right)^2.$$

1) Si $\quad \mathcal{H}(x_0, y_0) > 0 \quad$ et $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0 \quad \left(\text{ou} \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) > 0\right)$,
alors le point (x_0, y_0) est un point de minimum local de f.

2) Si $\quad \mathcal{H}(x_0, y_0) > 0 \quad$ et $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0 \quad \left(\text{ou} \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) < 0\right)$,
alors le point (x_0, y_0) est un point de maximum local f.

3) Si $\quad \mathcal{H}(x_0, y_0) < 0$,
alors le point (x_0, y_0) est un point selle de f (et *n'est pas* un point d'extremum local).

Remarques.

- Si $\mathcal{H}(x_0, y_0) = 0$, le théorème 2 ne nous permet pas de conclure et il faut étudier la fonction au voisinage du point stationnaire (x_0, y_0).
- Le théorème *ne se généralise pas* au cas des fonctions de n variables, avec $n \geqslant 3$.

Définition. On appelle $\mathcal{H}(x,y)$ le *hessien* de f. C'est le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix},$$

appelée *matrice hessienne* de f.

Méthode pour déterminer les points d'extremum local d'une fonction différentiable de deux variables

a) Dresser la liste des points stationnaires de f

b) Appliquer le théorème 2 pour déterminer la nature des points trouvés sous a).

Exemples

Déterminer les points d'extremum local des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$, avec $D(f) = \mathbb{R}^2$.

Comme $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 12$ sont des fonctions continues définies sur $\mathbb{R}^2$, la fonction f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ et donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Comme

$$\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 3y^2 - 12 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y^2 - 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x-1)(x+1) = 0 \\ (y-2)(y+2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \text{ ou } x = -1 \\ y = 2 \text{ ou } y = -2 \end{cases}$$

nous avons donc quatre points stationnaires :

$$(1,2), \quad (1,-2), \quad (-1,2), \quad (-1,-2).$$

Etant donné que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(x,y) = (6x)(6y) - 0^2 = 36xy,$$

le théorème 2 nous dit que :

- $(1,2)$ est un point de minimum local de f car $\mathcal{H}(1,2) = 36 \cdot 1 \cdot 2 > 0$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2) = 6 \cdot 1 > 0$
- $(1,-2)$ est un point selle de f car $\mathcal{H}(1,-2) = 36 \cdot 1 \cdot (-2) < 0$
- $(-1,2)$ est un point selle de f car $\mathcal{H}(-1,2) = 36 \cdot (-1) \cdot 2 < 0$
- $(-1,-2)$ est un point de maximum local de f car $\mathcal{H}(-1,-2) = 36(-1)(-2) > 0$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-2) = 6(-1) < 0$

2. $g(x,y)=1+x^2+y^2-2xy$, avec $D(g)=\mathbb{R}^2$.

Comme $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x-2y$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2y-2x$ sont des fonctions continues définies sur $\mathbb{R}^2$, la fonction g est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ et donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Comme

$$\begin{cases} 2x-2y = 0 \\ 2y-2x = 0 \end{cases} \iff \qquad y=x \qquad \text{(droite)}$$

nous avons donc une infinité de points stationnaires :

$$(x,x) \qquad \text{avec } x\in\mathbb{R}.$$

Etant donné que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)=2\,, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)=2\,, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y)=-2 \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(x,y)=2\cdot 2-(-2)^2=0\,,$$

le théorème 2 ne nous permet pas de conclure.

Comme

$$g(x,y)=1+x^2+y^2-2xy=1+x^2-2xy+y^2=1+(x-y)^2\geqslant 1=g(x,x)\,,$$

les points stationnaires de g sont des points de minimum local de g.