3.6. La règle généralisée de dérivation d'une composition

Rappel. Si $f : D(f) \to \mathbb{R}$ et $g : D(g) \to \mathbb{R}$ sont des fonctions dérivables d'une variable telles que $\operatorname{Im}(g) \subset D(f)$, alors la fonction composée $h = f \circ g$, définie par

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

est dérivable et nous avons

$$h'(x) = (f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

But : Obtenir une formule analogue dans le cas des fonctions de plusieurs variables.

- Si g est une fonction de n variables, pour pouvoir faire la composition il faut que f soit une fonction d'une variable et dans ce cas, $h = f \circ g$ est une fonction de n variables :

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

- Si f est une fonction de n variables, pour pouvoir faire la composition il faut que l'image de g se trouve dans $\mathbb{R}^n$ et dans ce cas, $h = f \circ g$ est une fonction d'une variable :

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

  En particulier, si f est une fonction de deux variables, pour pouvoir faire la composition il faut que l'image de g se trouve dans $\mathbb{R}^2$ et dans ce cas, $h = f \circ g$ est une fonction d'une variable :

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

Composition de fonctions

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $\vec{g} : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

La fonction $h = f \circ \vec{g} : I \to \mathbb{R}$ est une fonction d'une variable donnée par

$$h(t) = (f \circ \vec{g})(t) = f\big(\vec{g}(t)\big)$$

Si $\vec{g}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ alors

$$h(t) = f\big(x(t), y(t)\big), \qquad \text{pour } t \in I$$

Théorème. Si la courbe paramétrée $\vec{g} : I \to \mathbb{R}^2$ est dérivable et la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est diffférentiable, alors la fonction $h : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et nous avons

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)y'(t)$$

Notation abrégée :

$$h' = \frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y'$$

Notation vectorielle :

$$(f \circ \vec{g})'(t) = \underbrace{\vec{\nabla} f\big(\vec{g}(t)\big)}_{\substack{\text{gradient de } f \\ \text{au point } \vec{g}(t)}} \cdot \underbrace{\vec{g}\,'(t)}_{\substack{\text{vecteur tangent} \\ \text{au point } \vec{g}(t)}} = \vec{g}\,'(t) \cdot \vec{\nabla} f\big(\vec{g}(t)\big)$$

Conséquence

Si x et y sont des fonctions différentiables de deux variables :

$$x : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & x(u,v) \end{array} \qquad \text{et} \qquad y : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & y(u,v) \end{array}$$

alors la fonction de deux variables

$$h(u,v) = f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$$

a comme dérivées partielles

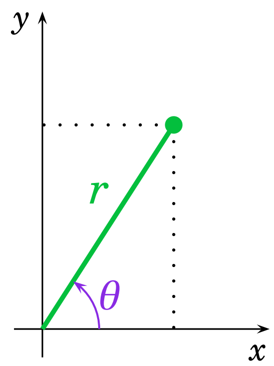
$$\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial h}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Notation matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial h}{\partial v} \end{pmatrix}}_{\text{gradient de } h} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}}_{\text{gradient de } f}$$

Exemple important : coordonnées polaires



$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases} \qquad \text{avec } r \geqslant 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R}$$

Comme nous avons

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos(\theta), \qquad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin(\theta),$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin(\theta), \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos(\theta),$$

la fonction

$$h(r,\theta) = f\big(x(r,\theta), y(r,\theta)\big)$$

a comme dérivées partielles

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial r} \\ \frac{\partial h}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Application

Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable de deux variables.

Soit $L(c)$ la courbe de niveau c de f :

$$L(c) = \{(x,y) \in D(f) : f(x,y) = c\} .$$

Soit $(x_0, y_0) \in L(c)$.

Soit $\vec{g} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ une paramétrisation de $L(c)$ autour de (x_0, y_0) telle que $\vec{g}(t_0) = (x_0, y_0)$, avec $t_0 \in]a,b[$.

Supposons que la courbe paramétrée $\vec{g}$ est de classe C^1 et régulière en t_0 $(\vec{g}\,'(t_0) \neq \vec{0})$

Par construction,

$$(f \circ \vec{g})(t) = c , \qquad \text{pour tout } t \in [a,b]$$

En dérivant on obtient

$$(f \circ \vec{g})'(t) = c' = 0 , \qquad \text{pour tout } t \in]a,b[$$

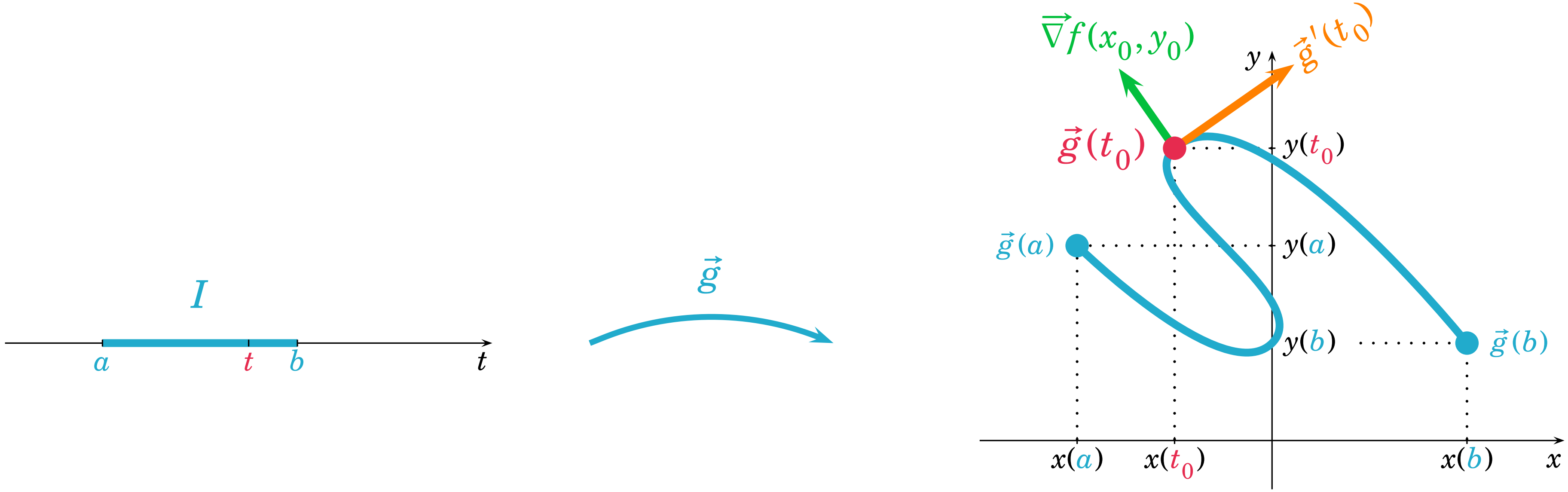
d'où

$$\vec{g}\,'(t) \cdot \vec{\nabla} f\big(\vec{g}(t)\big) = 0$$

En prenant $t = t_0$ on trouve

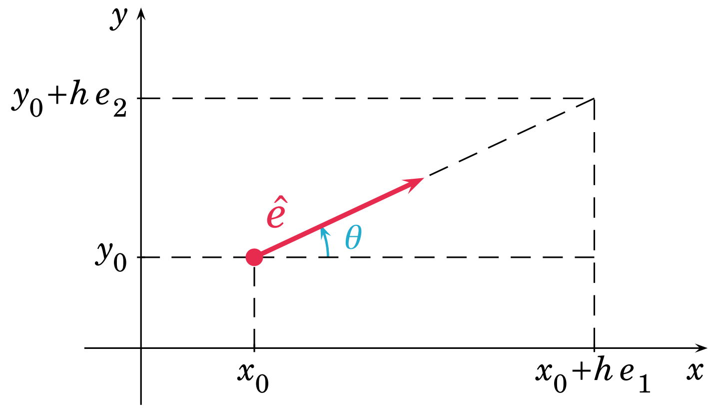
$$\vec{g}\,'(t_0) \cdot \vec{\nabla} f(x_0, y_0) = 0$$

Autrement dit, si nous supposons que la courbe paramétrée $\vec{g}$ est régulière en t_0 et que la fonction f est différentiable en (x_0, y_0), alors le vecteur tangent $\vec{g}\,'(t_0)$ ne s'annule pas et le vecteur $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ existe et est orthogonal à la courbe de niveau de f qui passe par le point (x_0, y_0).



3.7. La dérivée directionnelle et le gradient

Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble ouvert. Soit $(x_0, y_0) \in U$ et soit $\hat{e} = (e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2$ un vecteur unitaire (c'est-à-dire, $\|\hat{e}\| = \sqrt{e_1^2 + e_2^2} = 1$).



Nous avons vu que la droite du plan qui passe par le point (x_0, y_0) ayant $\hat{e}$ comme vecteur directeur peut être paramétrée par

$$\vec{\varphi}(t) = (x_0 + t\,e_1, y_0 + t\,e_2), \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

Définition. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et soit

$$g(t) = f\big(\vec{\varphi}(t)\big) = (f \circ \vec{\varphi})(t).$$

Si g est dérivable en $t = 0$ alors on dit que f est *dérivable au point (x_0, y_0) dans la direction du vecteur $\hat{e}$*. Dans ce cas, la *dérivée directionnelle de f au point (x_0, y_0) dans la direction du vecteur $\hat{e}$*, notée $D_{\hat{e}} f(x_0, y_0)$ est donnée par

$$D_{\hat{e}} f(x_0, y_0) = g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h\,e_1, y_0 + h\,e_2) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Remarques.

- Le point $(x_0 + h\,e_1, y_0 + h\,e_2)$ se trouve à une distance h du point (x_0, y_0).
- Si $\hat{e} = (\cos\theta, \sin\theta)$, nous parlons de dérivée de f dans la direction donnée par l'angle θ.
- Si $\hat{e} = (1,0)$ alors $\quad D_{\hat{e}} f(x_0, y_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.
- Si $\hat{e} = (0,1)$ alors $\quad D_{\hat{e}} f(x_0, y_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.
- Le nombre $D_{\hat{e}} f(x_0, y_0) = g'(0)$ est la pente de la droite tangente à la courbe obtenue en intersectant le graphe de f au point (x_0, y_0) avec le plan vertical passant par (x_0, y_0) qui contient le vecteur $\hat{e}$.
- Cette définition se généralise naturellement au cas de n variables.
- Si $\vec{e} \in \mathbb{R}^2$ est un vecteur non-nul quelconque tel que $\|\vec{e}\| \neq 1$, alors la définition de *dérivée de f au point (x_0, y_0) dans la direction du vecteur $\vec{e}$* varie selon les auteurs. Nous allons donc restreindre la discussion au cas des vecteurs unitaires.

Exemple

Calculer la dérivée directionnelle de la fonction

$$f(x,y) = 6x^2 - 5xy + 4x - 3y$$

au point $(0,0)$ dans la direction du vecteur $\hat{e} = (e_1, e_2)$.

Par définition,

$$\begin{aligned} D_{\hat{e}} f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(he_1, he_2) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{6h^2e_1^2 - 5h^2e_1e_2 + 4he_1 - 3he_2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (6he_1^2 - 5he_1e_2 + 4e_1 - 3e_2) \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$D_{\hat{e}} f(0,0) = 4e_1 - 3e_2.$$

Remarque.

La dérivée directionnelle de la fonction $f(x,y) = 6x^2 - 5xy + 4x - 3y$ au point $(0,0)$ est nulle dans toutes les directions $\hat{e} = (e_1, e_2)$ telles que $4e_1 - 3e_2 = 0$. Autrement dit,

$$\hat{e} = \pm\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

Question. Est-ce qu'il est possible de calculer la dérivée directionnelle de f autrement qu'en calculant une limite ?

Réponse : Oui, si l'on suppose par exemple que f est différentiable en (x_0, y_0).

En effet, comme $\vec{\varphi}(t) = (x_0 + t e_1, y_0 + t e_2)$ est une courbe paramétrée régulière telle que le vecteur tangent est $\vec{\varphi}\,'(t) = (e_1, e_2) = \hat{e}$, si la fonction f est différentiable en (x_0, y_0) alors la composition $g(t) = f\big(\vec{\varphi}(t)\big) = (f \circ \vec{\varphi})(t)$ est une fonction dérivable en $t = 0$ et nous avons

$$g'(0) = (f \circ \vec{\varphi})'(0) = \vec{\varphi}\,'(0) \cdot \vec{\nabla} f\big(\vec{\varphi}(0)\big) = \hat{e} \cdot \vec{\nabla} f(x_0, y_0).$$

Nous avons donc le résultat suivant :

Théorème. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble ouvert. Si $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable en $(x_0, y_0) \in U$, alors la dérivée directionnelle de f au point (x_0, y_0) dans la direction du vecteur $\hat{e}$ existe *pour tout choix de $\hat{e}$*. De plus, dans ce cas nous avons

$$D_{\hat{e}} f(x_0, y_0) = \hat{e} \cdot \vec{\nabla} f(x_0, y_0).$$

Conséquence.

Si f est différentiable en $(x_0, y_0) \in U$, alors le gradient de f au point (x_0, y_0) détermine complètement les dérivées directionnelles de f dans *toutes les directions* à l'aide de la formule $D_{\hat{e}} f(x_0, y_0) = \hat{e} \cdot \vec{\nabla} f(x_0, y_0)$.

Exemple

Considérons à nouveau la fonction

$$f(x,y) = 6x^2 - 5xy + 4x - 3y\,.$$

Comme f est une fonction de classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ et donc différentiable, nous pouvons utiliser le théorème précédent pour calculer $D_{\hat{e}}f(0,0)$.

Comme

$$\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = (12x - 5y + 4\,,\ -5x - 3)\,,$$

nous avons $\overrightarrow{\nabla} f(0,0) = (4,-3)$, d'où

$$D_{\hat{e}}f(0,0) = \hat{e}\cdot\overrightarrow{\nabla} f(0,0) = (e_1,e_2)\cdot(4,-3) = 4e_1 - 3e_2$$

et nous retrouvons le résultat obtenu avant.

Attention : Une fonction qui possède des dérivées directionnelles au point (x_0, y_0) dans toutes les directions $\hat{e}$, peut ne pas être différentiable en (x_0, y_0).

Considérons par exemple la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Nous avons montré que la limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

n'existe pas. Par conséquent, la fonction f *n'est pas* continue en $(0,0)$, ce qui implique que f *n'est pas* différentiable en $(0,0)$, même si les dérivées partielles existent en $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Comme $\vec{\nabla} f(0,0) = (0,0)$, nous avons ici

$$\hat{e} \cdot \vec{\nabla} f(0,0) = 0, \qquad \text{pour toute direction } \hat{e} = (e_1, e_2).$$

Par définition,

$$D_{\hat{e}} f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(he_1, he_2) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{(he_1)^2(he_2)}{(he_1)^4 + (he_2)^2} - 0\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^3(e_1)^2 e_2}{h^3\left(h^2(e_1)^4 + (e_2)^2\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{(e_1)^2 e_2}{h^2(e_1)^4 + (e_2)^2}$$

Nous distinguons deux cas :

- Si $e_2 = 0$, alors $$D_{\hat{e}} f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^2(e_1)^4} = 0$$
- Si $e_2 \neq 0$, alors $$D_{\hat{e}} f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{(e_1)^2 e_2}{h^2(e_1)^4 + (e_2)^2} = \frac{(e_1)^2 e_2}{(e_2)^2} = \frac{(e_1)^2}{e_2}$$

Ceci montre que les dérivées directionnelles de f au point $(0,0)$ existent dans toutes les directions $\hat{e}$. De plus,

$$D_{\hat{e}} f(0,0) \neq 0, \qquad \text{pour toute direction } \hat{e} = (e_1, e_2) \text{ avec } e_2 \neq 0 \text{ et } e_1 \neq 0.$$

Par conséquent,

$$D_{\hat{e}} f(0,0) \neq \hat{e} \cdot \vec{\nabla} f(0,0)$$

pour toute direction $\hat{e} = (e_1, e_2)$ avec $e_2 \neq 0$ et $e_1 \neq 0$.