3.5. Fonctions différentiables (ou dérivables)

Rappel. Soit $f: D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable et soit $x_0 \in D(f)$ tel que f est définie dans un voisinage de x_0.

On dit que f est dérivable en x_0 si la limite $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et on note

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

la dérivée de f en x_0.

But : Généraliser cette notion aux fonctions $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pour $n \geqslant 2$.

Remarque.

Nous avons montré que les dérivées partielles de la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

existent pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et qu'en particulier elles existent en $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0\,.$$

D'autre part, comme

$$f(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} f(x,x) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)\,.$$

la fonction f *n'est pas* continue en $(0,0)$.

Par conséquent, l'existence des dérivées partielles d'une fonction de deux variables en un point (x_0, y_0) *ne suffit pas* pour garantir la continuité de la fonction au point (x_0, y_0), contrairement au cas des fonctions d'une variable où nous avons le résultat

« Si la dérivée de f existe en $x_0 \in D(f)$, alors f est continue en x_0 ».

La dérivabilité d'une fonction de plusieurs variables ne se résume donc pas à l'existence des dérivées partielles de la fonction !

Rappel. Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable et soit $x_0 \in D(f)$ tel que f est définie dans un voisinage de x_0.

Si la fonction f est dérivable en x_0, alors le graphe de f possède une droite tangente au point $x = x_0$ de pente $f'(x_0)$ et d'équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

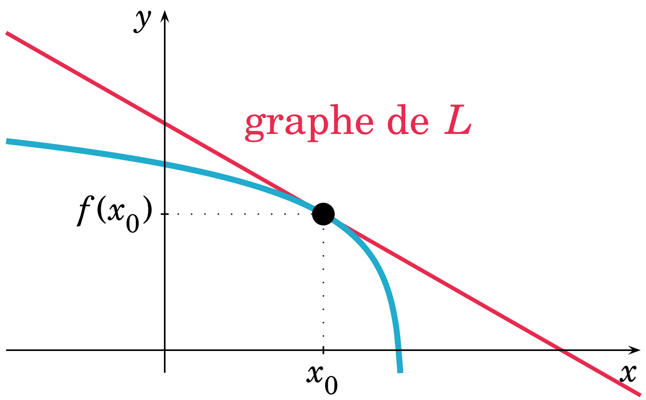
De plus, si l'on définit la fonction

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

appelée l'*approximation linéaire de la fonction f autour du point $x = x_0$*, alors

$$\begin{cases} L(x_0) = f(x_0) \\ L'(x_0) = f'(x_0) \end{cases}$$

et pour des valeurs de x proches de x_0 nous avons $f(x) \approx L(x)$.



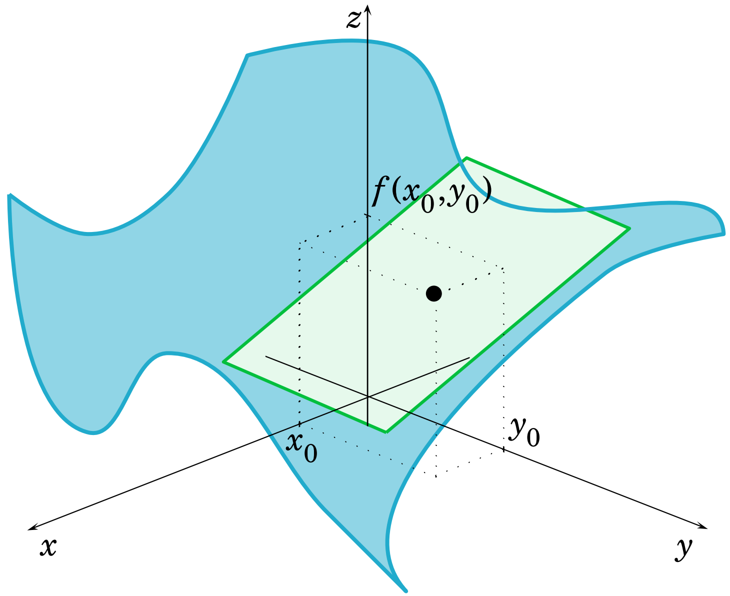
Rappel. Si $f : D(f) \to \mathbb{R}$ est une fonction d'une variable, alors nous avons

$$\begin{aligned}
f \text{ est } \textit{dérivable} \text{ en } x_0 \quad &\Longleftrightarrow \quad f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\
&\Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}\right) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)-\big(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\big)}{x-x_0}\right) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-L(x)}{x-x_0} = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad f \text{ est } \textit{différentiable} \text{ en } x_0
\end{aligned}$$

Remarque. Pour avoir $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-L(x)}{x-x_0} = 0$, il faut que $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \big(f(x)-L(x)\big) = 0$. De plus, il faut que l'écart $f(x)-L(x)$ aille vers zéro plus vite que $x-x_0$, ce qui nous permet de dire que « $L(x)$ est une bonne approximation de $f(x)$ pour des valeurs de x proches de x_0 ».

Considérons maintenant une fonction f de deux variables et un point $(x_0, y_0) \in D(f)$.

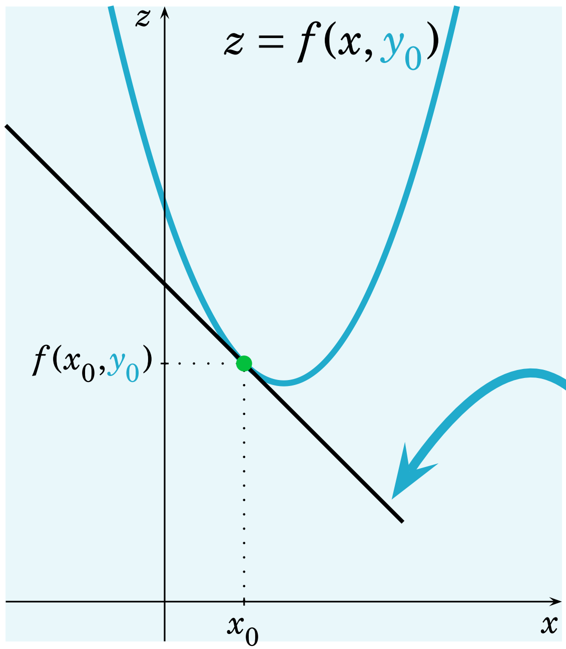
Question. Est-ce que le graphe de la fonction f au point $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big) \in \mathbb{R}^3$ admet un plan tangent et si oui, quelle est son équation ?



Rappel. L'équation du plan passant par le point $\big(x_0, y_0, z_0\big)$ normal au vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \,.$$

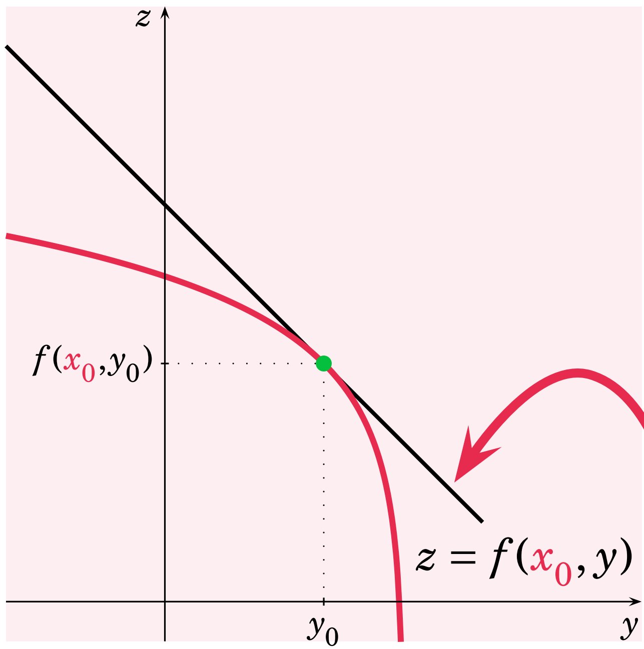
Coupe du graphe de f par le plan $y = y_0$:



droite tangente de pente $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$

et vecteur directeur $\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$

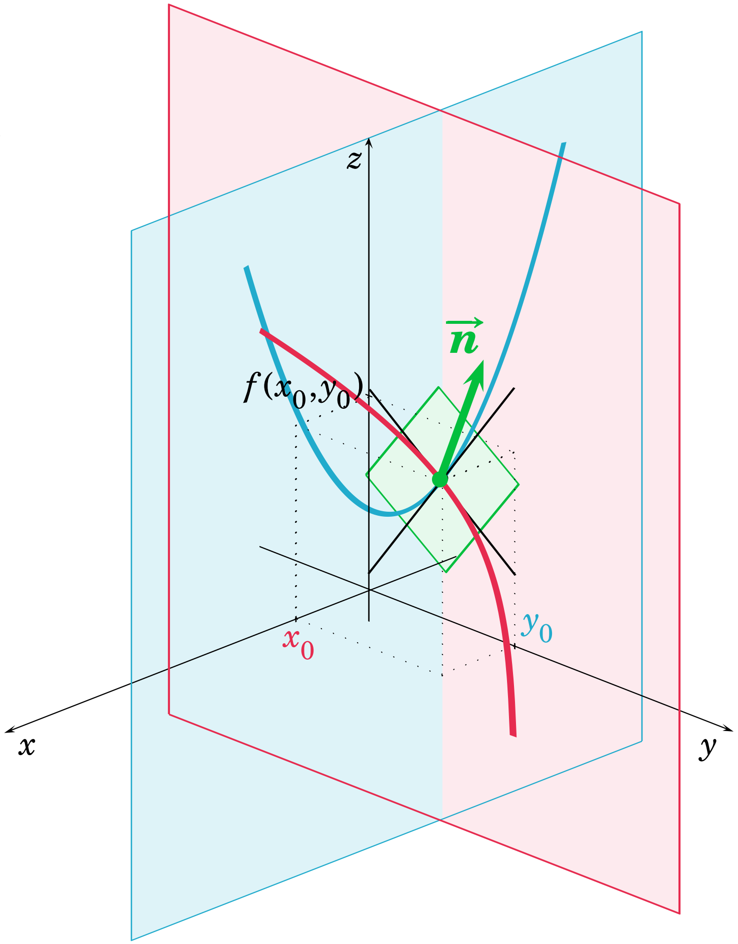
Coupe du graphe de f par le plan $x = x_0$:



droite tangente de pente $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

et vecteur directeur $\vec{d}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$

Comme nous cherchons un plan qui soit tangent au graphe de f au point $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big) \in \mathbb{R}^3$, le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ doit être orthogonal aux vecteurs $\vec{d}_1$ et $\vec{d}_2$:



$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{d}_1 = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{d}_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + c\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ b + c\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

En prenant $c = 1$ nous trouvons

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ -\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + 1\big(z - f(x_0, y_0)\big) = 0$$

ou encore

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

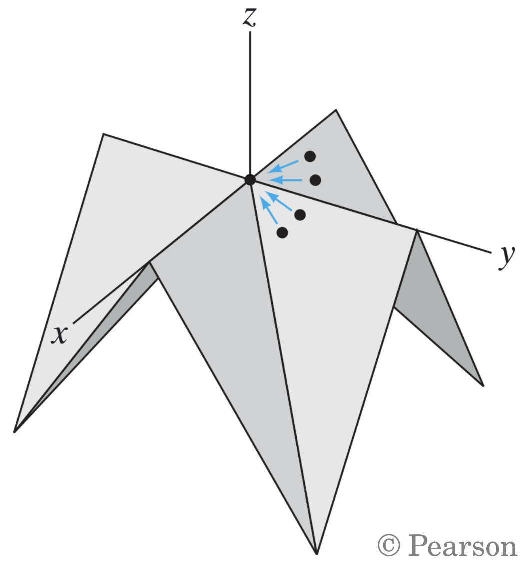
Question. Est-ce que le plan d'équation

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

est forcément le plan tangent au graphe de la fonction f au point $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big) \in \mathbb{R}^3$?

Réponse. Non. Considérons par exemple la fonction

$$f(x, y) = \big||x| - |y|\big| - |x| - |y|.$$



Le calcul des dérivées partielles au point $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

nous donne l'équation du plan

$$z = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y - 0) \quad \Longrightarrow \quad z = 0$$

Ce plan n'est clairement pas tangent au graphe de f. En effet, si l'on coupe le graphe de f par le plan vertical $y = x$ nous obtenons la fonction d'une variable

$$g(x) = f(x, x) = \big||x| - |x|\big| - |x| - |x| = -2|x|$$

qui n'est pas dérivable en $x = 0$ et de ce fait, n'a pas de droite tangente en $x = 0$.

Définition. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

On dit que f est *différentiable en* $(x_0, y_0) \in U$ (ou *dérivable en* $(x_0, y_0) \in U$) si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existent et si la fonction $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

est une « bonne approximation de $f(x, y)$ pour des valeurs de (x, y) proches de (x_0, y_0) » dans le sens suivant :

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - L(x, y)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0.$$

Si la fonction f est différentiable en (x_0, y_0), alors le plan d'équation

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

est le plan tangent au graphe de f au point $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big) \in \mathbb{R}^3$ et la fonction L est appelée *approximation linéaire de* f *autour du point* (x_0, y_0).

On dit que f est *différentiable* si elle différentiable en tout point de son domaine.

Exemple

La fonction $f(x,y)=1-x^2-2y^2$ est telle que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-2x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-4y$.

Par conséquent, $f(0,0)=1$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ et $L(x,y)=1$. Comme

$$\frac{f(x,y)-L(x,y)}{\|(x,y)-(0,0)\|}=\frac{-x^2-2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{et} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-L(x,y)}{\|(x,y)-(0,0)\|}=0,$$

nous pouvons conclure que f est différentiable en $(0,0)$.

Remarque. Si f est différentiable en (x_0,y_0), alors la fonction

$$L(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

est telle que

$$\begin{cases} L(x_0,y_0)=f(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial L}{\partial x}(x_0,y_0)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x_0,y_0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{cases}$$

et pour des valeurs de (x,y) proches de (x_0,y_0) nous avons $f(x,y)\approx L(x,y)$.

Nous avons deux résultats très importants (donnés ici sans démonstration) :

Théorème 1. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

Si les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent dans un voisinage de $(x_0, y_0) \in U$ et sont *continues en* (x_0, y_0), alors f est différentiable en (x_0, y_0).

Autrement dit, si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \qquad \text{et} \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

alors

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - L(x,y)}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|} = 0.$$

Théorème 2. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

Si f est différentiable en $(x_0, y_0) \in U$, alors f est continue en (x_0, y_0).

Conséquence :

Si les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent dans un voisinage de $(x_0, y_0) \in U$ et sont *continues en* (x_0, y_0), alors f est continue en (x_0, y_0).

Remarque. Une formulation équivalente du théorème 2 est :

Si f *n'est pas* continue en (x_0, y_0), alors f *n'est pas* différentiable en (x_0, y_0).

Cette formulation est très utile pour déterminer si une fonction n'est pas différentiable en un point.

Exemple

Nous avons vu que la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

n'est pas continue en $(0,0)$, ce qui implique qu'elle *n'est pas* différentiable en $(0,0)$, même si les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent sur $\mathbb{R}^2$.

Comme f *n'est pas* différentiable en $(0,0)$, le théorème 1 nous permet de conclure que dans ce cas, les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *ne sont pas* continues en $(0,0)$.

Attention : Si f est continue en (x_0, y_0), alors on ne peut rien conclure au sujet de la différentiabilité de f en (x_0, y_0).

Définition. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

On dit que f est de *classe* $C^0(U)$, noté $f \in C^0(U)$, si f est continue sur U.

On dit que f est de *classe* $C^1(U)$, noté $f \in C^1(U)$, si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur U.

Les théorèmes 1 et 2 impliquent :

$$f \in C^1(U) \quad \Longrightarrow \quad f \text{ différentiable sur } U \quad \Longrightarrow \quad f \text{ continue sur } U$$

Par contre, nous avons

$$f \in C^1(U) \quad \not\Longleftarrow \quad f \text{ différentiable sur } U \quad \not\Longleftarrow \quad f \text{ continue sur } U$$

Définition. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

On dit que f est de *classe $C^2(U)$*, noté $f \in C^2(U)$, si les quatre dérivées partielles d'ordre 2 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ existent et sont continues sur U.

Proposition. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

Si f est une fonction de classe $C^2(U)$, alors f est une fonction de classe $C^1(U)$.

Preuve. Soit $(x_0, y_0) \in U$. Si f est une fonction de classe $C^2(U)$, alors les dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

existent dans un voisinage de $(x_0, y_0) \in U$ et sont continues en (x_0, y_0). Les théorèmes 1 et 2 impliquent que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en (x_0, y_0). D'autre part, les dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

existent dans un voisinage de $(x_0, y_0) \in U$ et sont continues en (x_0, y_0). Les théorèmes 1 et 2 impliquent que $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue en (x_0, y_0), d'où le résultat. $\blacksquare$

Définition. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

On dit que f est de *classe* $C^3(U)$, noté $f \in C^3(U)$, si les huit dérivées partielles d'ordre 3 $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$ et $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$ existent et sont continues sur U.

On dit que f est de *classe* $C^k(U)$, noté $f \in C^k(U)$, si les 2^k dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur U.

On dit que f est de *classe* $C^\infty(U)$, noté $f \in C^\infty(U)$, si f est de classe $C^k(U)$ pour tout k.

Nous avons les implications suivantes :

$$f \in C^\infty(U) \quad \Longrightarrow \quad \cdots \quad \Longrightarrow \quad f \in C^3(U) \quad \Longrightarrow \quad f \in C^2(U) \quad \Longrightarrow \quad f \in C^1(U)$$

Par contre, nous avons

$$f \in C^\infty(U) \quad \not\Longleftarrow \quad \cdots \quad \not\Longleftarrow \quad f \in C^3(U) \quad \not\Longleftarrow \quad f \in C^2(U) \quad \not\Longleftarrow \quad f \in C^1(U)$$

Application : *Calcul d'incertitude*

Si nous mesurons des quantités x et y avec une certaine incertitude :

$$x = x_0 \pm \Delta x \qquad \text{(c'est-à-dire } x \in [x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x])$$
$$y = y_0 \pm \Delta y \qquad \text{(c'est-à-dire } y \in [y_0 - \Delta y, y_0 + \Delta y])$$

alors, en première approximation, nous pouvons remplacer la valeur de $f(x,y)$ par

$$f(x_0, y_0) \pm \Delta f\,,$$

où l'*erreur* Δf est donnée par

$$\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right| \Delta y\,.$$

Exemple

L'aire d'un rectangle de côtés x et y est donnée par $f(x,y) = xy$.

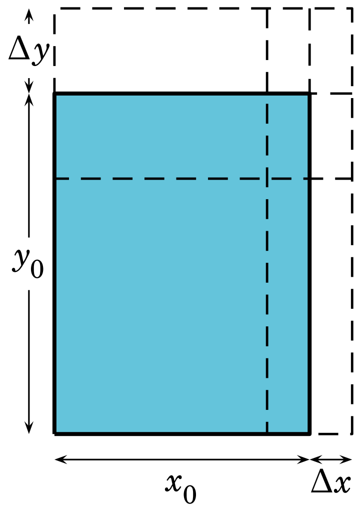
Comme $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x$, l'erreur sur l'aire est donc

$$\Delta f = |y_0|\Delta x + |x_0|\Delta y\,.$$

Si les valeurs mesurées sont $x = 3 \pm 0.01$ et $y = 4 \pm 0.02$, nous trouvons

$$\Delta f = 4 \cdot 0.01 + 3 \cdot 0.02 = 0.1$$

et en première approximation l'aire est égale à 12 ± 0.1.



Nous avons des définitions analogues dans le cas des fonctions de plus de deux variables :

Définition. Soit $U \subset \mathbb{R}^3$ un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de trois variables.

On dit que la fonction f est *différentiable en* $(x_0, y_0, z_0) \in U$ (ou *dérivable en* $(x_0, y_0, z_0) \in U$) si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$ existent et si la fonction $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$L(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0).$$

est une « bonne approximation de $f(x, y, z)$ pour des valeurs de (x, y, z) proches de (x_0, y_0, z_0)» dans le sens suivant :

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} \frac{f(x, y, z) - L(x, y, z)}{\|(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)\|} = 0.$$

Si f est différentiable en (x_0, y_0), alors la fonction L est appelée *approximation linéaire de f autour du point (x_0, y_0, z_0)*.

On dit que f est *différentiable* si elle différentiable en tout point de son domaine.

Définition. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de n variables.

On dit que f est *différentiable en $\vec{x}_0 \in U$* (ou *dérivable en $\vec{x}_0 \in U$*) si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0)$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}_0), \ldots,$ $\frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0)$ existent et si la fonction $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned} L(\vec{x}) &= f(\vec{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0)(x_1 - x_{0,1}) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0)(x_n - x_{0,n}) \\ &= f(\vec{x}_0) + \left(\vec{\nabla} f(\vec{x}_0)\right) \cdot \left(\vec{x} - \vec{x}_0\right). \end{aligned}$$

est une « bonne approximation de $f(\vec{x})$ pour des valeurs de $\vec{x}$ proches de $\vec{x}_0$ » dans le sens suivant :

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \frac{f(\vec{x}) - L(\vec{x})}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0.$$

Si f est différentiable en $\vec{x}$, alors la fonction L est appelée *approximation linéaire de f autour du point $\vec{x}_0$*.

On dit que f est *différentiable* si elle différentiable en tout point de son domaine.