3.4. Dérivées partielles

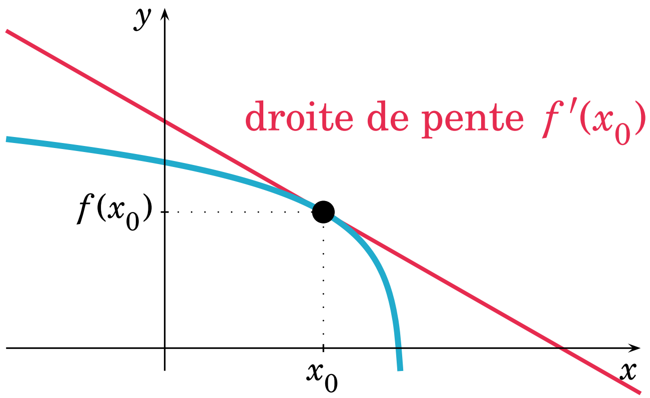
Rappel. Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable et soit $x_0 \in D(f)$ tel que f est définie dans un voisinage de x_0.

On dit que f est dérivable en x_0 si la limite $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe et on note

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

la dérivée de f en x_0.

Géométriquement, $f'(x_0)$ est la pente de la droite tangente au graphe de la fonction f au point $\big(x_0, f(x_0)\big)$:



Remarque. La dérivée f' peut aussi être notée $\frac{df}{dx}$.

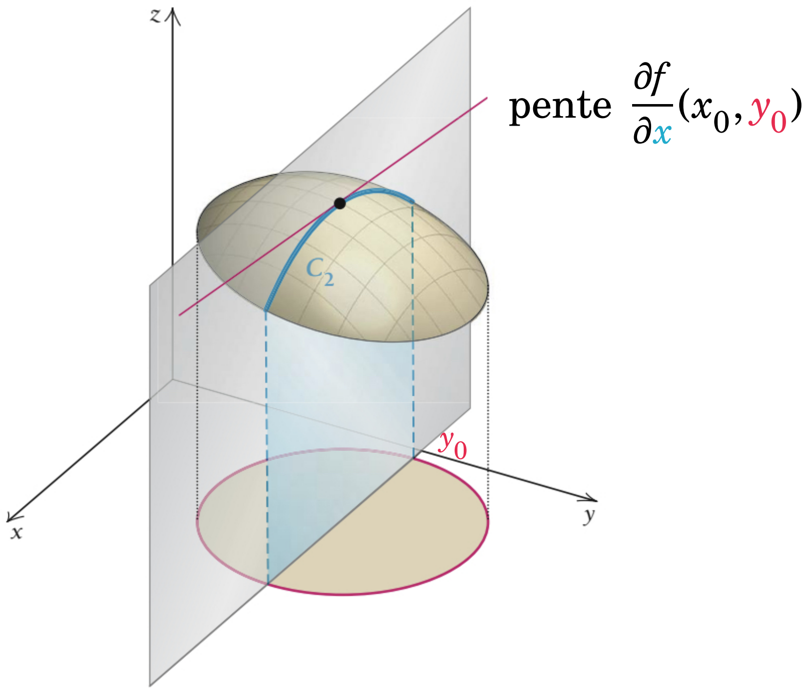
Définition. Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et soit $(x_0, y_0) \in D(f) \subset \mathbb{R}^2$ tel que f est définie dans un voisinage de (x_0, y_0), par exemple $B\big((x_0, y_0), r\big)$, avec $r > 0$.

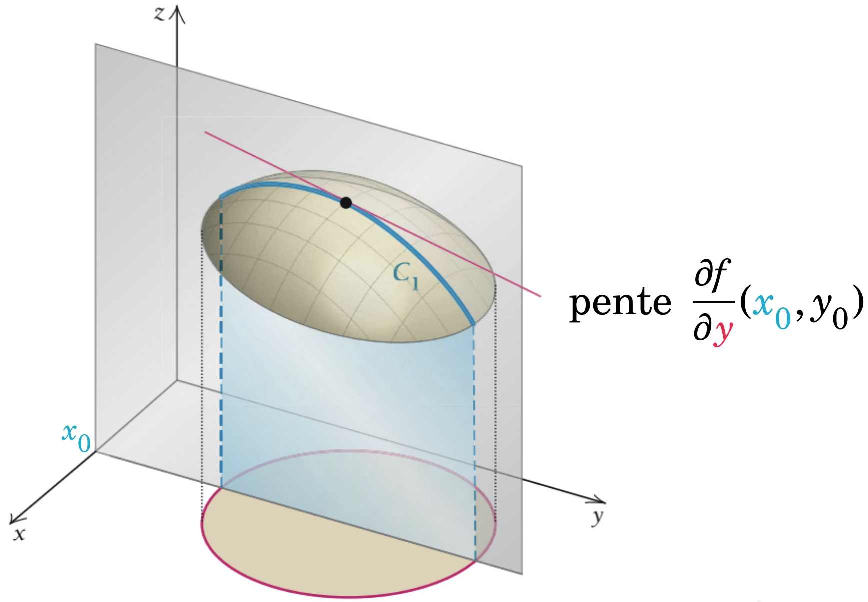
- Si la fonction $g(x) = f(x, y_0)$ est dérivable en x_0 on dit que la *dérivée partielle de f par rapport à x*, notée $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, existe et est égale à $g'(x_0)$:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}\ .$$
- Si la fonction $h(y) = f(x_0, y)$ est dérivable en y_0 on dit que la dérivée partielle de f par rapport à y, notée $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, existe et est égale à $h'(y_0)$:
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}\ .$$

Notations alternatives :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \partial_x f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) = \partial_1 f(x_0, y_0) = f'_1(x_0, y_0)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \partial_y f(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = \partial_2 f(x_0, y_0) = f'_2(x_0, y_0)$$

Interprétation géométrique des dérivées partielles





L'ensemble de tous les points de $\mathbb{R}^3$ tels que $y = y_0$ est un plan parallèle au plan $0xz$ qui coupe le graphe de f le long de la courbe C_2. La pente de la droite tangente à la courbe C_2 au point $\left(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\right)$ est la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.

L'ensemble de tous les points de $\mathbb{R}^3$ tels que $x = x_0$ est un plan parallèle au plan $0yz$ qui coupe le graphe de f le long de la courbe C_1. La pente de la droite tangente à la courbe C_1 au point $\left(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\right)$ est la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

- Si les dérivées partielles de f par rapport à x et y existent, on dit que le *gradient de f*, noté $\overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0)$, existe et est donné par

$$\overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

  Parfois on écrira $\overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$.

  Le symbole ∇ est appelé « nabla » (il s'agit de la lettre greque Delta inversée).

Méthode pour calculer les dérivées partielles

- Pour calculer la dérivée partielle de f par rapport à x, on regarde y comme une constante et on dérive la fonction $f(x, y)$ par rapport à x en utilisant les règles de dérivation des fonctions d'une variable.
- Pour calculer la dérivée partielle de f par rapport à y, on regarde x comme une constante et on d'erive la fonction $f(x, y)$ par rapport à y en utilisant les règles de dérivation des fonctions d'une variable.

Exemples

Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = 3x + y^2$

Nous avons

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}(3x) + \frac{\partial}{\partial x}(y^2) = 3 + 0 = 3 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}(3x) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 0 + 2y = 2y \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad \overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2y \end{pmatrix}$$

2. $g(x,y) = x^3 y^4$

Nous avons

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= y^4 \frac{\partial}{\partial x}(x^3) = 3x^2 y^4 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= x^3 \frac{\partial}{\partial y}(y^4) = 4x^3 y^3 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad \overrightarrow{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 y^4 \\ 4x^3 y^3 \end{pmatrix}$$

3. $h(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ (distance à l'origine)

Considérons tout d'abord la fonction d'une variable

$$f(u)=\sqrt{u^2+c}=(u^2+c)^{1/2} \qquad \text{avec } c\in\mathbb{R} \text{ une constante.}$$

Nous avons

$$f'(u)=\frac{1}{2}(u^2+c)^{-1/2}(u^2+c)'=\frac{1}{2}(u^2+c)^{-1/2}(2u)=u(u^2+c)^{-1/2}=\frac{u}{\sqrt{u^2+c}}$$

Par conséquent,

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\[2ex] \dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{array}\right\}\Longrightarrow \vec{\nabla}h(x,y)=\begin{pmatrix}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\[2ex] \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{pmatrix}$$

4. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

Si $(x,y)\neq(0,0)$ nous avons :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)=\frac{y(x^2+y^2)-xy(2x)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{(par calcul direct ou par symétrie car ici } f(a,b)=f(b,a))$$

Si $(x,y)=(0,0)$ nous avons :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h\cdot 0}{h^2+0^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0\cdot h}{0^2+h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

Accessoirement, pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ nous pouvons aussi considérer la fonction d'une variable

$$\begin{aligned} g(x) = f(x,0) &= \begin{cases} \dfrac{x\cdot 0}{x^2+0^2} & \text{si } (x,0)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= 0 \qquad \text{pour tout } x\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

Comme $g'(x)=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, nous retrouvons $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=g'(0)=0$.

En résumé,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque. La notion de dérivée partielle se généralise naturellement aux fonctions de n variables avec $n \geqslant 3$.

Par exemple, si $f(x,y,z) = x^2yz + \sin(yz) + z^3 + 4\ln(xy^5)$, alors nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2yz) + \frac{\partial}{\partial x}\big(\sin(yz)\big) + \frac{\partial}{\partial x}(z^3) + \frac{\partial}{\partial x}\big(4\ln(xy^5)\big) \\
&= yz\,\frac{\partial}{\partial x}(x^2) + 0 + 0 + 4\,\frac{1}{xy^5}\,\frac{\partial}{\partial x}(xy^5) = yz(2x) + 4\,\frac{1}{xy^5}\,y^5 \\
&= 2xyz + \frac{4}{x} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial y}(x^2yz) + \frac{\partial}{\partial y}\big(\sin(yz)\big) + \frac{\partial}{\partial y}(z^3) + \frac{\partial}{\partial y}\big(4\ln(xy^5)\big) \\
&= x^2z\,\frac{\partial}{\partial y}(y) + \cos(yz)\,\frac{\partial}{\partial y}(yz) + 0 + 4\,\frac{1}{xy^5}\,\frac{\partial}{\partial y}(xy^5) \\
&= x^2z + z\cos(yz) + \frac{20xy^4}{xy^5} = x^2z + z\cos(yz) + \frac{20}{y} \\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z}(x^2yz) + \frac{\partial}{\partial z}\big(\sin(yz)\big) + \frac{\partial}{\partial z}(z^3) + \frac{\partial}{\partial z}\big(4\ln(xy^5)\big) \\
&= x^2y\,\frac{\partial}{\partial z}(z) + \cos(yz)\,\frac{\partial}{\partial z}(yz) + 3z^2 + 0 \\
&= x^2y + y\cos(yz) + 3z^2
\end{aligned}$$

Dérivées partielles d'ordre deux

Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

Si $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ existe pour tout $(x_0, y_0) \in D(f)$, alors nous pouvons définir la fonction dérivée partielle de f par rapport à x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} : D(f) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \end{aligned}$$

Si $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existe pour tout $(x_0, y_0) \in D(f)$, alors nous pouvons définir la fonction dérivée partielle de f par rapport à y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} : D(f) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{aligned}$$

Nous pouvons considérer les dérivées partielles de ces deux fonctions par rapport à x et y qui seront notées comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Nous avons le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & & f \arrow[dll, bend right] \arrow[drr, bend left] & & & \\
 & \dfrac{\partial f}{\partial x} \arrow[dl, bend right] \arrow[dr, bend left] & & & & \dfrac{\partial f}{\partial y} \arrow[dl, bend right] \arrow[dr, bend left] & \\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}
\end{tikzcd}$$

Attention : Certains auteurs utilisent les notations $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$.

Exemples

Calculer les dérivées d'ordre deux des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = x^2 y^3$

   Comme $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2) y^3 + x^2 \dfrac{\partial}{\partial x}(y^3) = 2xy^3 + 0 = 2xy^3$

   nous avons

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy^3) = \frac{\partial}{\partial x}(2x) y^3 + 2x \frac{\partial}{\partial x}(y^3) = 2y^3 + 0 = 2y^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy^3) = \frac{\partial}{\partial y}(2x) y^3 + 2x \frac{\partial}{\partial y}(y^3) = 0 + 2x(3y^2) = 6xy^2$$

   D'autre part, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial y}(x^2) y^3 + x^2 \dfrac{\partial}{\partial y}(y^3) = 0 + x^2(3y^2) = 3x^2 y^2$

   implique

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 y^2) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2) y^2 + 3x^2 \frac{\partial}{\partial x}(y^2) = 6xy^2 + 0 = 6xy^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 y^2) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2) y^2 + 3x^2 \frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 0 + 3x^2(2y) = 6x^2 y$$

2. $g(x,y) = \sin(xy)$

Nous avons

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \cos(xy)\,\frac{\partial}{\partial x}(xy) = y\cos(xy)$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\big(y\cos(xy)\big) = \frac{\partial}{\partial x}(y)\cos(xy) + y\,\frac{\partial}{\partial x}\big(\cos(xy)\big) = 0 + y\big(-\sin(xy)\big)\,\frac{\partial}{\partial x}(xy)\\
&= -y^2\sin(xy)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\big(y\cos(xy)\big) = \frac{\partial}{\partial y}(y)\cos(xy) + y\,\frac{\partial}{\partial y}\big(\cos(xy)\big) = \cos(xy) + y\big(-\sin(xy)\big)\,\frac{\partial}{\partial y}(xy)\\
&= \cos(xy) - xy\sin(xy)
\end{aligned}$$

Comme $g(a,b) = g(b,a)$, nous trouvons par symétrie,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y) &= \cos(xy) - xy\sin(xy)\\
\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) &= -x^2\sin(xy)
\end{aligned}$$

Les exemples suggèrent $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$.

Question. Est-ce toujours le cas ?

Réponse. En général, non (voir par exemple l'exercice 2 de la série 8).

Théorème. Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et $(x_0, y_0) \in D(f)$.

Si l'on suppose que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existent et sont continues dans un voisinage de (x_0, y_0), alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0).$$