3.3. Limite et continuité

Rappel.

Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable et soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

On dit que la *limite de f en x_0* existe et est égale à ℓ, notée

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

si $f(x)$ est aussi proche de ℓ que l'on veut dès que x est suffisamment proche de x_0.

Plus précisément, si pour tout $\varepsilon > 0$ (aussi petit que voulu), il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{alors} \quad \left| f(x) - \ell \right| < \varepsilon$$

Rappel.

Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable et soit $x_0 \in D(f)$.

On dit que la fonction f est *continue au point x_0* si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

On dit que la fonction f est *continue* si elle est continue en tout point de son domaine.

Nous aimerions étudier ces notions dans le cadre des fonctions de plusieurs variables :

Définition. Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction de n variables et soit $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

On dit que la *limite de f en $\vec{x}_0$* existe et est égale à ℓ, notée

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = \ell$$

si $f(\vec{x})$ est aussi proche de ℓ que l'on veut dès que $\vec{x}$ est suffisamment proche de $\vec{x}_0$.

Plus précisément, si pour tout $\varepsilon > 0$ (aussi petit que voulu), il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\text{si} \quad 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta \quad \text{alors} \quad |f(\vec{x}) - \ell| < \varepsilon$$

En particulier, dans le cadre des fonctions de deux variables :

Définition. Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

On dit que la *limite de f en (x_0, y_0)* existe et est égale à ℓ, notée

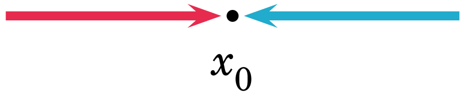
$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y) = \ell$$

si $f(x, y)$ est aussi proche de ℓ que l'on veut dès que (x, y) est suffisamment proche de (x_0, y_0).

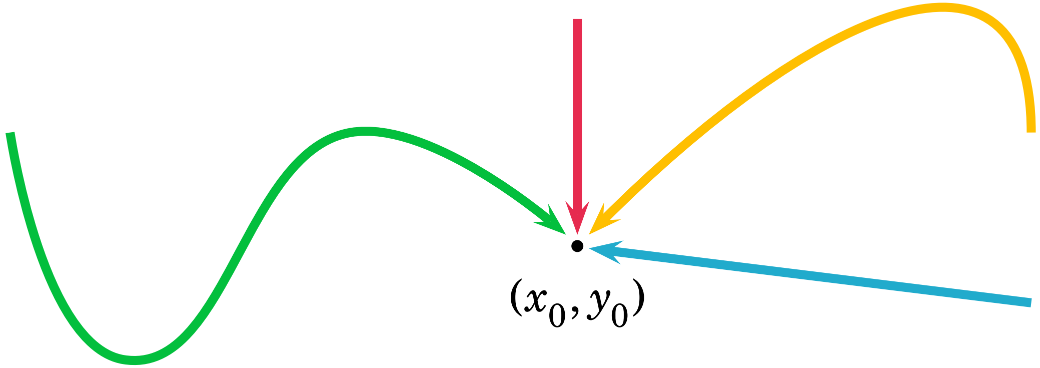
Plus précisément, si pour tout $\varepsilon > 0$ (aussi petit que voulu), il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\text{si} \quad 0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \quad \text{alors} \quad |f(x, y) - \ell| < \varepsilon$$

Rappel. Pour les fonctions d'une variable, il arrive qu'une limite n'existe pas, par exemple si $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$. En particulier, il n'y a que deux manières d'approcher x_0 :



Dans le cas des fonctions de deux variables, nous pouvons approcher (x_0, y_0) de plusieurs manières :



Ainsi, dans ce cas, pour que la limite existe, il faut trouver le même nombre ℓ quelque soit le parcours choisi !

Par conséquent, pour montrer qu'une limite n'existe pas, il suffit de trouver deux parcours vers (x_0, y_0) qui donnent des résultats différents.

De manière générale, l'étude des courbes de niveau d'une fonction peut être utile pour déterminer qu'une limite n'existe pas. En particulier, la limite n'existe pas en chaque point où il y aurait un croisement de deux courbes de niveau.

Exemple

Soit $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, avec $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Montrer que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

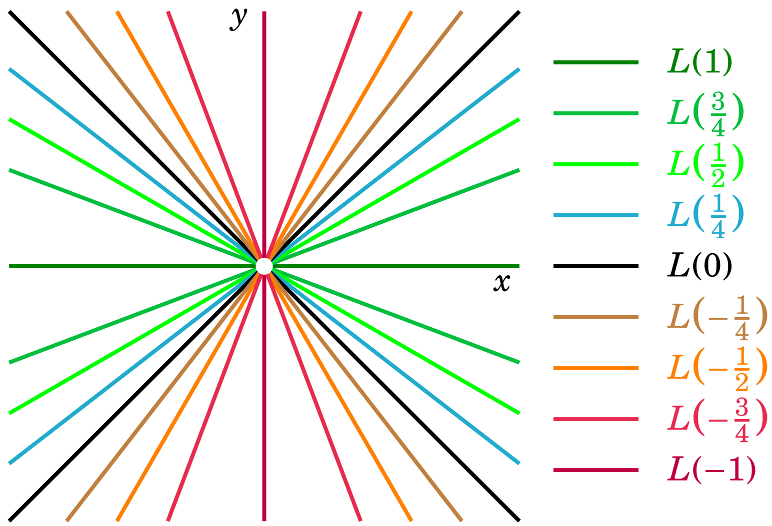
Comme

$$f(x,0) = \frac{x^2 - 0^2}{x^2 + 0^2} = 1 \quad \text{et} \quad f(0,y) = \frac{0^2 - y^2}{0^2 + y^2} = -1,$$

nous trouvons

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 1 \neq -1 = \lim_{y\to 0} f(0,y).$$

Par conséquent, la limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.



Remarque. Nous avons vu que les courbes de niveau de f sont des droites qui passent par l'origine. Comme

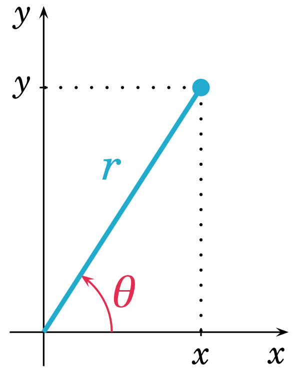
$$f(x,mx) = \frac{x^2 - m^2x^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{x^2(1-m^2)}{x^2(1+m^2)} = \frac{1-m^2}{1+m^2},$$

pour chaque valeur *fixée* de $m \in \mathbb{R}$, nous obtenons

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \frac{1-m^2}{1+m^2}.$$

Question. Comment montrer qu'une limite existe ?

Problème. Considérer *tous* les parcours possibles.



Réponse possible. Pour calculer des limites de la forme $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nous pouvons utiliser les coordonnées polaires

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta), \\ y = r\sin(\theta). \end{cases}$$

Dans ce cas, pour tenir compte de *toutes* les approches possibles $(x,y) \to (0,0)$, nous pouvons considérer la limite $r \to 0$ pour θ arbitraire mais pas fixé. Autrement dit, si nous arrivons à trouver deux fonctions g et h telles que

$$g(r) \leqslant f\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) \leqslant h(r) \qquad \text{pour tout } \theta \in \mathbb{R}$$

qui satisfont

$$\lim_{r\to 0} g(r) = \ell = \lim_{r\to 0} h(r)$$

alors le théorème du sandwich (ou des deux gendarmes) nous donne

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell\,.$$

Exemples

1. Soit $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$, avec $D(f)=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

   Calculer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ (si la limite existe).

   Comme $f(x,0)=\dfrac{x^2\cdot 0}{x^2+0^2}=0$ et $f(0,y)=\dfrac{0^2y}{0^2+y^2}=0$, si la limite existe, elle vaut 0.

   Nous avons

$$f\big(r\cos(\theta),r\sin(\theta)\big)=\frac{(r\cos(\theta))^2r\sin(\theta)}{(r\cos(\theta))^2+(r\sin(\theta))^2}=\frac{r^3\cos^2(\theta)\sin(\theta)}{r^2}$$
$$=r\cos^2(\theta)\sin(\theta)$$

   Comme

$$-r\leqslant r\cos^2(\theta)\sin(\theta)\leqslant r\qquad \text{pour tout } \theta\in\mathbb{R}$$

   et

$$\lim_{r\to 0}(-r)=0=\lim_{r\to 0}r,$$

   nous trouvons donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$$

2. Soit $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, avec $D(f)=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Calculer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ (si la limite existe).

Nous avons

$$f\big(r\cos(\theta),r\sin(\theta)\big)=\frac{(r\cos(\theta))^2-(r\sin(\theta))^2}{(r\cos(\theta))^2+(r\sin(\theta))^2}=\frac{r^2(\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta))}{r^2}$$

$$=\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)=\cos(2\theta)$$

Comme

$$-1\leqslant\cos(2\theta)\leqslant 1 \qquad \text{pour tout } \theta\in\mathbb{R}$$

nous trouvons une valeur différente pour chaque $\theta\in\mathbb{R}$ et par conséquent, nous concluons que la limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

3. Soit $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$, avec $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Calculer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ (si la limite existe).

Comme $f(x,0) = \dfrac{x^2 \cdot 0}{x^4+0^2} = 0$ et $f(0,y) = \dfrac{0^2y}{0^4+y^2} = 0$, si la limite existe, elle vaut 0.

Nous avons

$$f\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) = \frac{(r\cos(\theta))^2 r\sin(\theta)}{(r\cos(\theta))^4+(r\sin(\theta))^2} = \frac{r\cos^2(\theta)\sin(\theta)}{r^2\cos^4(\theta)+\sin^2(\theta)}$$

Vu que pour chaque $\theta = \theta_c$ fixé,

$$\lim_{r\to 0} \frac{r\cos^2(\theta_c)\sin(\theta_c)}{r^2\cos^4(\theta_c)+\sin^2(\theta_c)} = 0$$

nous sommes tentés de conclure que la limite existe et vaut 0, mais un encadrement pour θ arbitraire mais pas fixé semble difficile à trouver.

Pour montrer que la limite n'existe pas, il suffit de trouver deux trajectoires vers $(0,0)$ qui donnent des valeurs differentes. Comme le calcul

$$f(x,ax^2) = \frac{x^2ax^2}{x^4+(ax^2)^2} = \frac{ax^4}{(1+a^2)x^4} = \frac{a}{1+a^2}$$

nous dit que l'arc de parabole $y = ax^2$ (avec $x \neq 0$) est la courbe de niveau $\frac{a}{1+a^2}$ de f, pour chaque $a \neq 0$ fixé nous avons

$$\lim_{x\to 0} f(x,ax^2) = \frac{a}{1+a^2} \neq 0.$$

Définition. Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et soit $(x_0, y_0) \in D(f)$.
On dit que la fonction f est *continue au point* (x_0, y_0) si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Plus précisément, si pour tout $\varepsilon > 0$ (aussi petit que voulu), il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\text{si} \quad 0 < \|(x,y)-(x_0,y_0)\| < \delta \quad \text{alors} \quad |f(x,y)-f(x_0,y_0)| < \varepsilon$$

On dit que la fonction f est *continue* si elle est continue en tout point de son domaine.

Remarques.

- Si f et g sont continues en (x_0, y_0), alors la somme $f+g$ et le produit fg sont continues en (x_0, y_0). Si de plus, $g(x_0,y_0) \neq 0$, alors le quotient $\dfrac{f}{g}$ est aussi continu en (x_0, y_0).
- Si $f : D(f) \to \mathbb{R}$ est une fonction de deux variables continue en (x_0, y_0) et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction d'une variable continue en $z_0 = f(x_0, y_0)$, alors la composition

$$\begin{aligned} g\circ f : D(f) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto g\big(f(x,y)\big) \end{aligned}$$

  est continue en (x_0, y_0).

Exemple

Etudier la continuité de la fonction

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Comme les fonctions $(x,y)\mapsto x$ et $(x,y)\mapsto y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$, les fonctions

$$(x,y)\mapsto x^2, \qquad (x,y)\mapsto y^2, \qquad (x,y)\mapsto x^2-y^2, \qquad (x,y)\mapsto x^2+y^2$$

sont aussi continues sur $\mathbb{R}^2$ et la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

D'autre part, nous avons vu que la limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas et par conséquent la fonction f *n'est pas* continue en $(0,0)$.

Prolongement par continuité

Si la fonction $f : D(f) \to \mathbb{R}$ est définie dans un voisinage de $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *sauf* en (x_0, y_0) et si $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$ existe, alors il est possible de prolonger f par continuité :

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \neq (x_0, y_0) \\ \ell & \text{si } (x,y) = (x_0, y_0) \end{cases}$$

Exemple

La fonction $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ est continue sur $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Comme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ alors il est possible de prolonger f par continuité :

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$