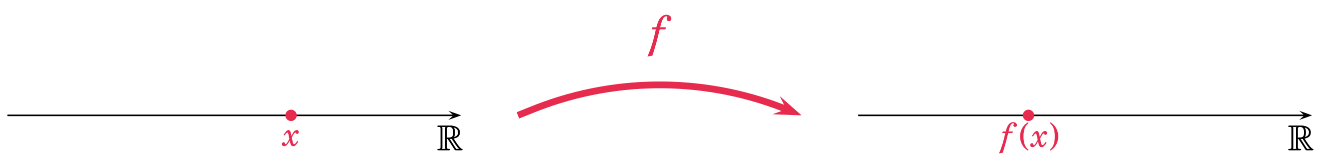
3. Fonctions réelles de plusieurs variables

3.1. Définitions et exemples

Rappel. Une *fonction réelle d'une variable réelle* est une application f d'un sous-ensemble $D(f) \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: à chaque $x \in D(f)$ correspond de manière unique son image $f(x) \in \mathbb{R}$.

On note
$$\begin{aligned} f : D(f) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Illustration :



Le sous-ensemble $D(f) \subset \mathbb{R}$ est appelé *domaine de définition* de f. Si l'on ne donne pas $D(f)$ explicitement, on considère alors le plus grand domaine de définition possible.

On appelle *image* de la fonction f, l'ensemble
$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : \ y = f(x) \text{ pour un certain } x \in D(f)\} \subset \mathbb{R}.$$

Le *graphe* de f est l'ensemble de tous les points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que
$$x \in D(f) \quad \text{et} \quad y = f(x).$$

Exemples

1. $f(x) = 2$, avec $D(f) = \mathbb{R}$.

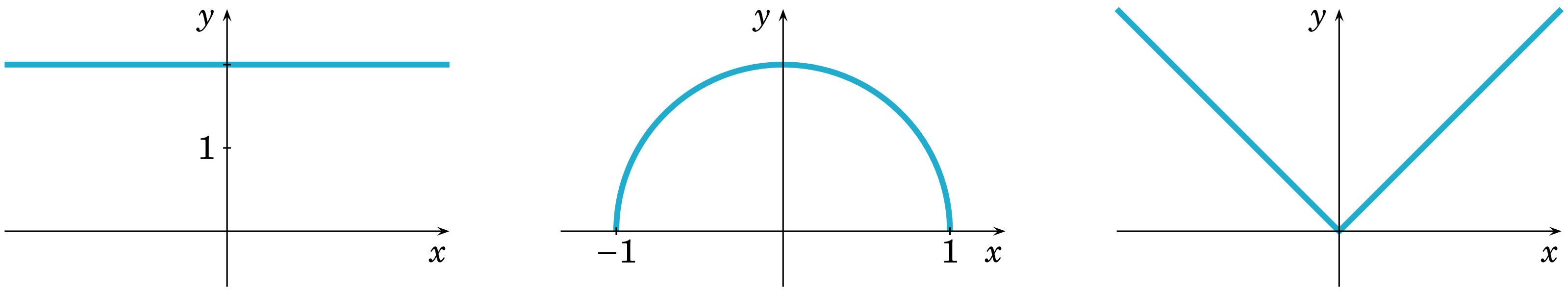
   Le graphe de f est la droite $y = 2$ dans $\mathbb{R}^2$.

2. $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$, avec $D(g) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leqslant 1\}$.

   Si $y = g(x)$, alors $x^2 + y^2 = 1$ et $y \geqslant 0$. Le graphe de g est alors un demi-cercle de rayon 1 centré à l'origine.

3. $h(x) = \sqrt{x^2} = |x|$, avec $D(h) = \mathbb{R}$.

   Le graphe de h est la réunion de deux demi-droites.

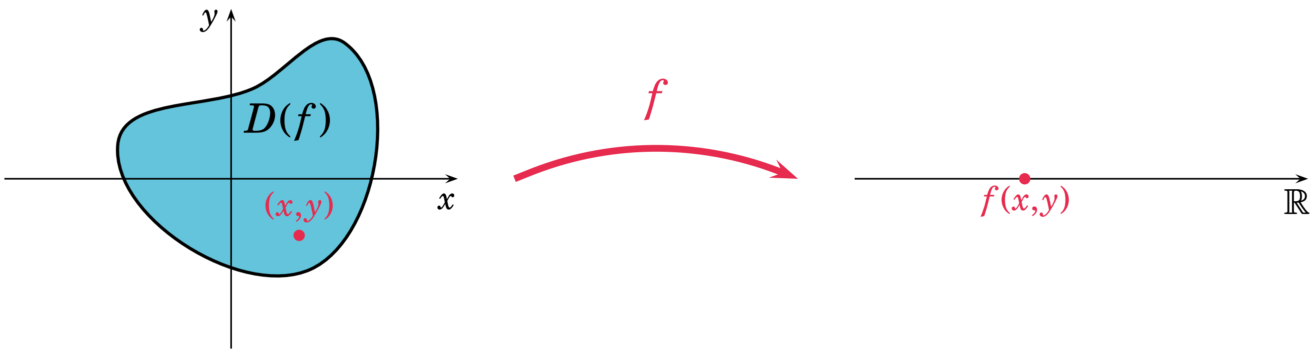


Graphes de f, g et h

Définition. Une *fonction réelle de deux variables réelles* est une application f d'un sous-ensemble $D(f) \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$: à chaque point $(x,y) \in D(f)$ correspond de manière unique son image $f(x,y) \in \mathbb{R}$.

On note
$$\begin{aligned} f : D(f) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto f(x,y) \end{aligned}$$

Illustration :



Le sous-ensemble $D(f) \subset \mathbb{R}^2$ est appelé *domaine de définition* de f. Si l'on ne donne pas $D(f)$ explicitement, on considère alors le plus grand domaine de définition possible.

On appelle *image* de la fonction f, l'ensemble
$$\mathrm{Im}(f) = \{z \in \mathbb{R} : z = f(x,y) \text{ pour un certain } (x,y) \in D(f)\} \subset \mathbb{R}.$$

Le *graphe* de f est l'ensemble de tous les points $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que
$$(x,y) \in D(f) \quad \text{et} \quad z = f(x,y).$$

Remarque. On peut voir $f(x,y)$ comme l'altitude au point de coordonnées $(x,y) \in D(f)$.

Exemples

1. $f(x,y) = xy$

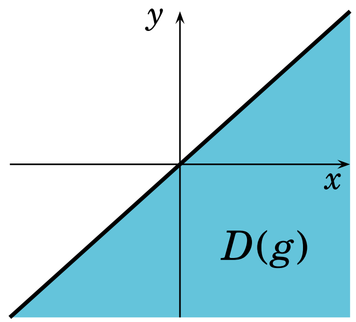
Nous avons $D(f) = \mathbb{R}^2$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.

2. $f(x,y) = x^2 + y^2$

Nous avons $D(f) = \mathbb{R}^2$ et $\mathrm{Im}(f) = [0,\infty[$.

3. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Nous avons $D(f) = \mathbb{R}^2$ et $\mathrm{Im}(f) = [0,\infty[$.

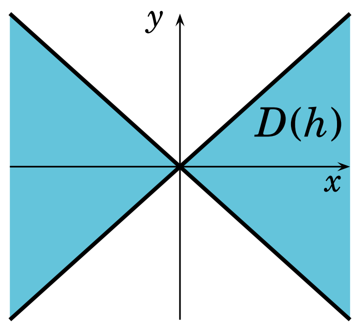


4. $g(x,y) = \sqrt{x-y}$.

Nous avons $\mathrm{Im}(g) = [0,\infty[$ et

$$(x,y) \in D(g) \iff x - y \geqslant 0$$

Par conséquent, $D(g) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant y\right\}$.



5. $h(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$.

Nous avons $\mathrm{Im}(h) = [0,\infty[$ et

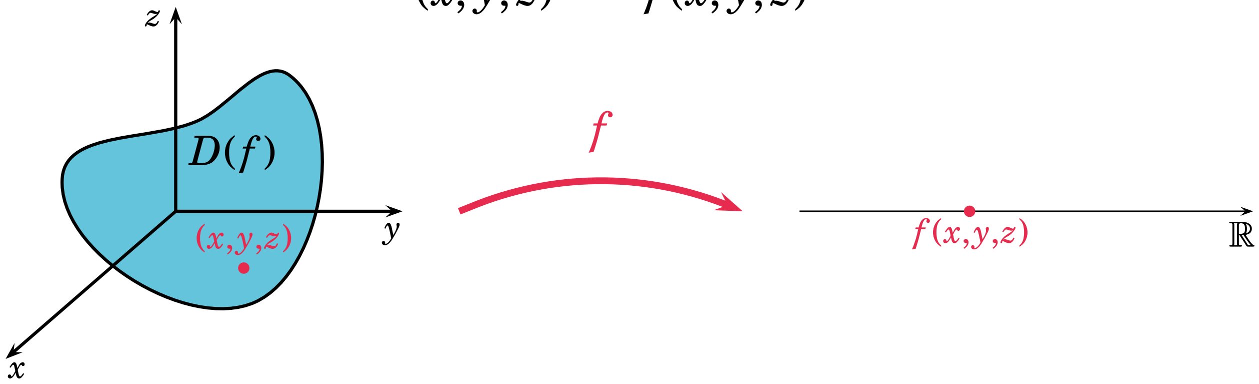
$$\begin{aligned}(x,y) \in D(h) &\iff x^2 - y^2 \geqslant 0\\ &\iff (x-y)(x+y) \geqslant 0\end{aligned}$$

Par conséquent, $D(h) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -|x| \leqslant y \leqslant |x|\right\}$.

Définition. Une *fonction réelle de trois variables réelles* est une application f d'un sous-ensemble $D(f) \subset \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$: à chaque point $(x, y, z) \in D(f)$ correspond de manière unique son image $f(x, y, z) \in \mathbb{R}$.

On note
$$f : \begin{array}{rcl} D(f) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & f(x, y, z) \end{array}$$

Illustration :



Le sous-ensemble $D(f) \subset \mathbb{R}^3$ est appelé *domaine de définition* de f. Si l'on ne donne pas $D(f)$ explicitement, on considère alors le plus grand domaine de définition possible.

On appelle *image* de la fonction f, l'ensemble

$$\mathrm{Im}(f) = \{u \in \mathbb{R} : u = f(x, y, z) \text{ pour un certain } (x, y, z) \in D(f)\} \subset \mathbb{R}.$$

Le *graphe* de f est l'ensemble de tous les points $(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$(x, y, z) \in D(f) \quad \text{et} \quad u = f(x, y, z).$$

Remarque. On peut voir $f(x, y, z)$ comme la densité au point de coordonnées $(x, y, z) \in D(f)$.

Exemples

1. $f(x,y,z) = 3x - 2y + 5z - 1$

   Nous avons $D(f) = \mathbb{R}^3$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.

2. $g(x,y,z) = \sqrt{x+y-z}$

   Nous avons $D(g) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y \geqslant z\right\}$ et $\mathrm{Im}(g) = [0,\infty[$.
   Le domaine de g est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ situés au-dessous du plan $z = x + y$.

3. $h(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$

   Nous avons $D(h) = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{(0,0,0)\right\}$ et $\mathrm{Im}(h) =]0,\infty[$.
   Le domaine de h est formé de tous les points de $\mathbb{R}^3$ différents de l'origine.

De manière générale nous avons :

Définition. Une *fonction réelle de n variables réelles* est une application f d'un sous-ensemble $D(f) \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$: à chaque point $(x_1, \ldots, x_n) \in D(f)$ correspond de manière unique son image $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$.

On note $\begin{array}{rccl} f: & D(f) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & f(x_1, \ldots, x_n) \end{array}$ ou $\begin{array}{rcl} f: D(f) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{x} & \longmapsto & f(\vec{x}) \end{array}$

Le sous-ensemble $D(f) \subset \mathbb{R}^n$ est appelé *domaine de définition* de f. Si l'on ne donne pas $D(f)$ explicitement, on considère alors le plus grand domaine de définition.

On appelle *image* de la fonction f, l'ensemble

$$\mathrm{Im}(f) = \{x_{n+1} \in \mathbb{R} : x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n) \text{ pour un certain } (x_1, \ldots, x_n) \in D(f)\} \subset \mathbb{R}.$$

Le *graphe* de f est l'ensemble de tous les points $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

1. $(x_1, \ldots, x_n) \in D(f)$,

2. $x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)$.

Remarque. On peut aussi étudier des fonctions

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & \big(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n)\big) \end{array}$$

mais cela revient à étudier m fonctions réelles de n variables réelles :

$$f_j : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & f_j(x_1,\dots,x_n) \end{array} \qquad \text{avec } j = 1,\dots,m.$$

3.2. Le graphe d'une fonction de deux variables

Définition. Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

Le *graphe de la fonction f* est l'ensemble

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D(f) \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad z = f(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3$$

Exemples

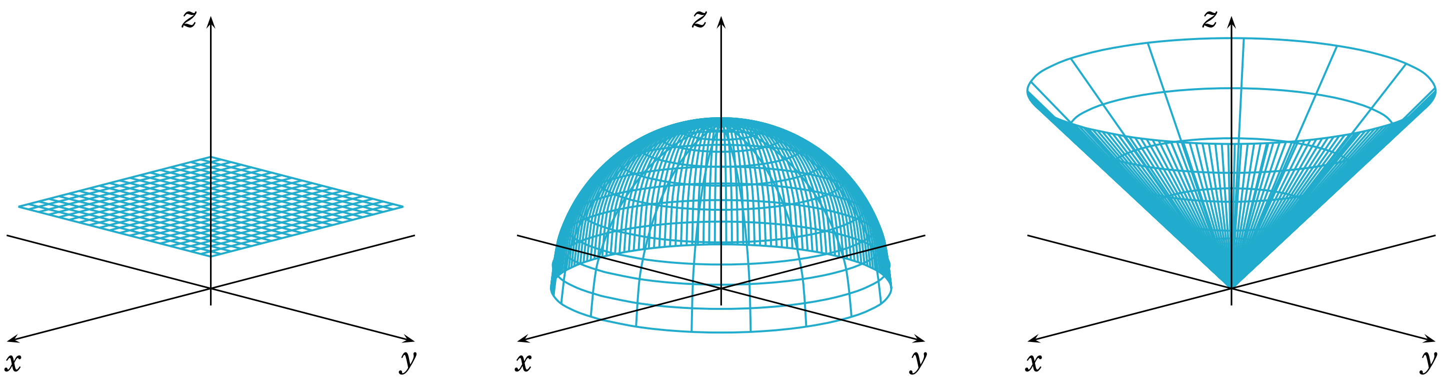
1. $f(x, y) = 2$, avec $D(f) = \mathbb{R}^2$.

   Le graphe de f est le plan $z = 2$ dans $\mathbb{R}^3$.

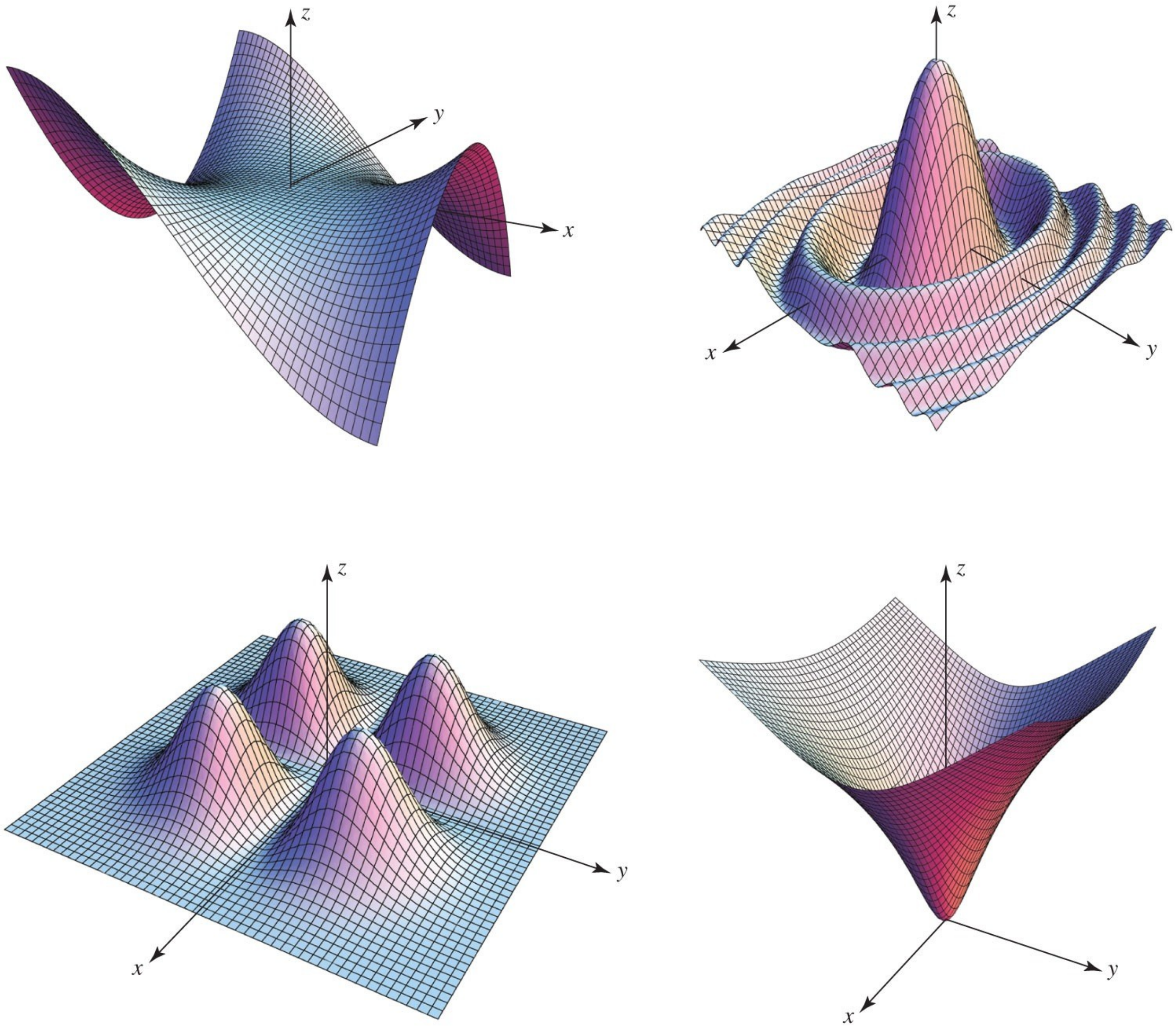
2. $g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, avec $D(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

   Si $z = g(x, y)$, alors $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et $z \geqslant 0$. Le graphe de g est alors une demi-sphère.

3. $h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, avec $D(h) = \mathbb{R}^2$. Le graphe de h est un cône.



Graphes de f, g et h



Quelques graphes de fonctions de deux variables

Courbes de niveau

En général, il est difficile d'esquisser le graphe d'une fonction de deux variables. Pour nous aider à le faire, nous allons considérer les courbes de niveau ou ensembles de niveau :

Définition. Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

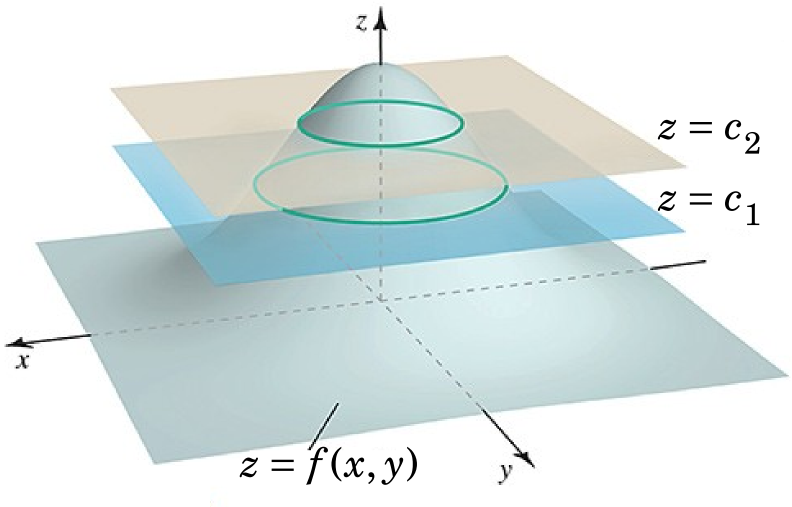
Si $c \in \mathrm{Im}(f)$, la *courbe de niveau* c de f est le sous-ensemble

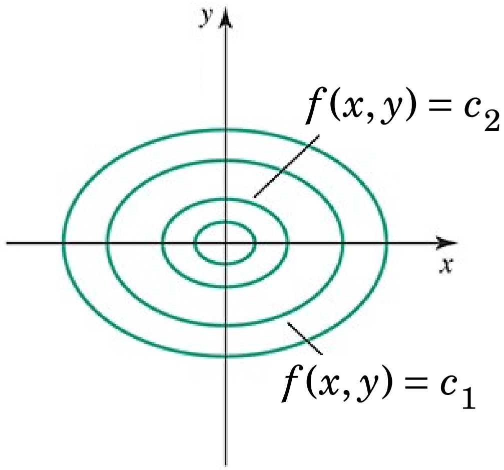
$$L(c) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\right\} \subset \mathbb{R}^2 .$$

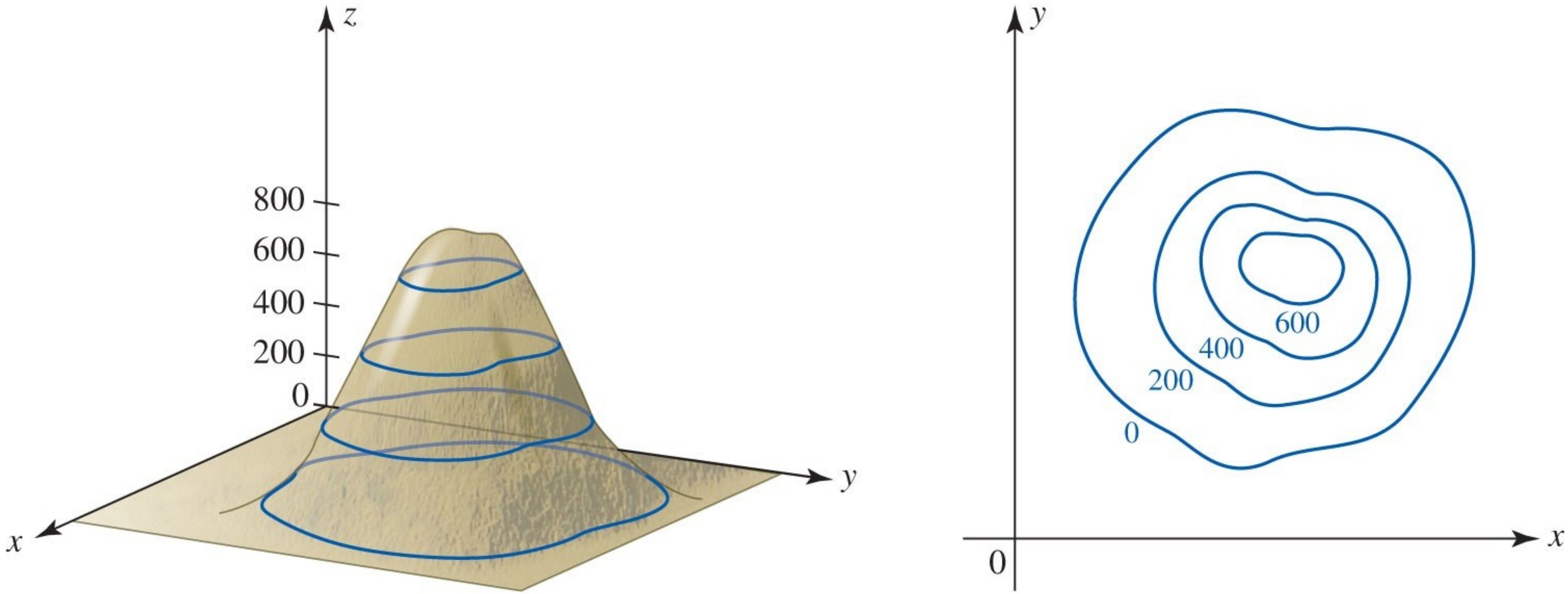
Si $c \notin \mathrm{Im}(f)$, on pose $L(c) = \emptyset$.

Géométriquement, la courbe de niveau c est la trace obtenue en coupant le graphe de f par le plan horizontal $z = c$, dessinée sur le plan $0xy$.

Pour construire le graphe à partir des courbes de niveau, il faut placer chaque courbe de niveau c à la hauteur $z = c$.





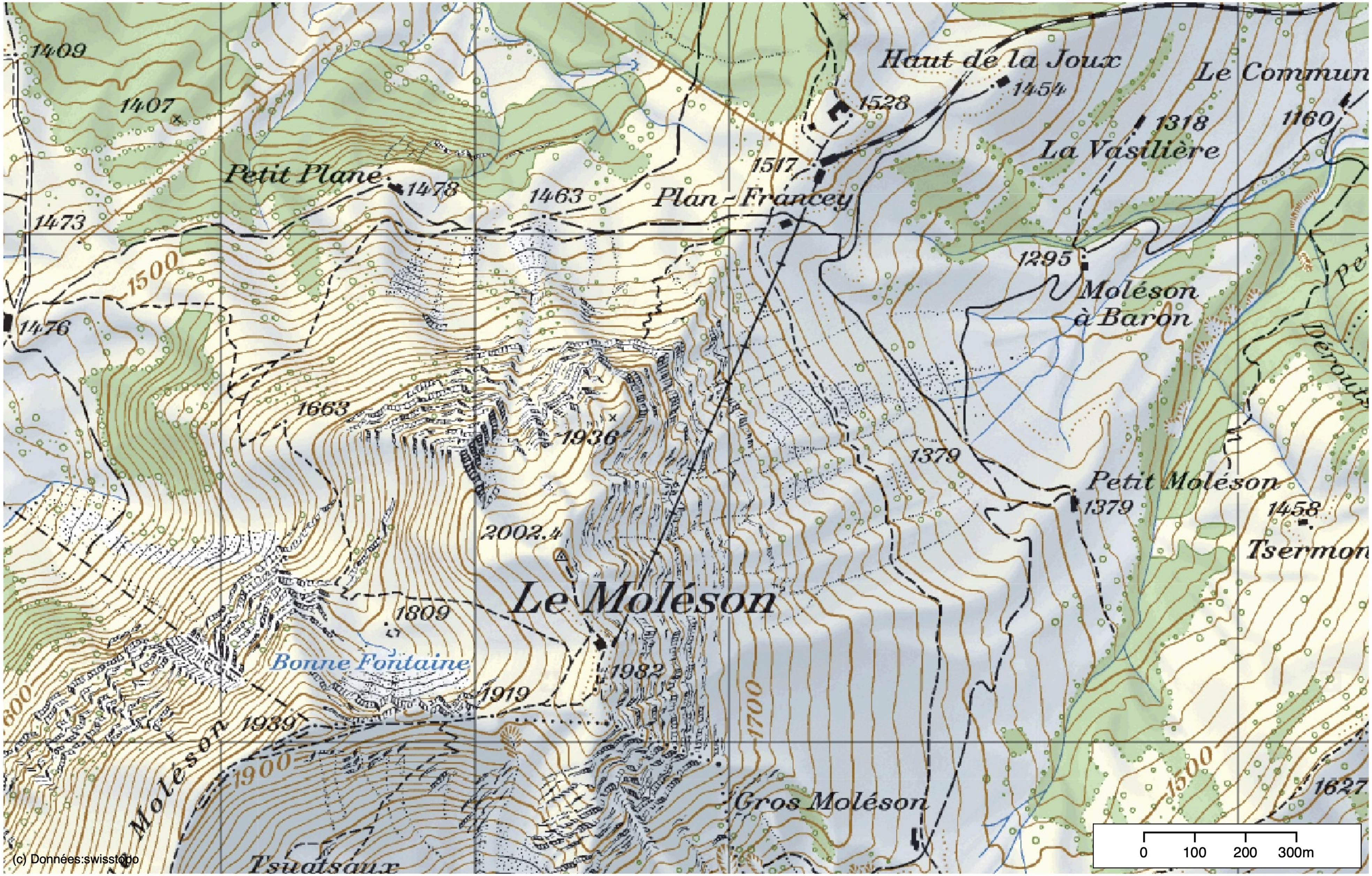

z
800
600
400
200
0
x
y
y
600
400
200
0
0
x

map.geo.admin.ch

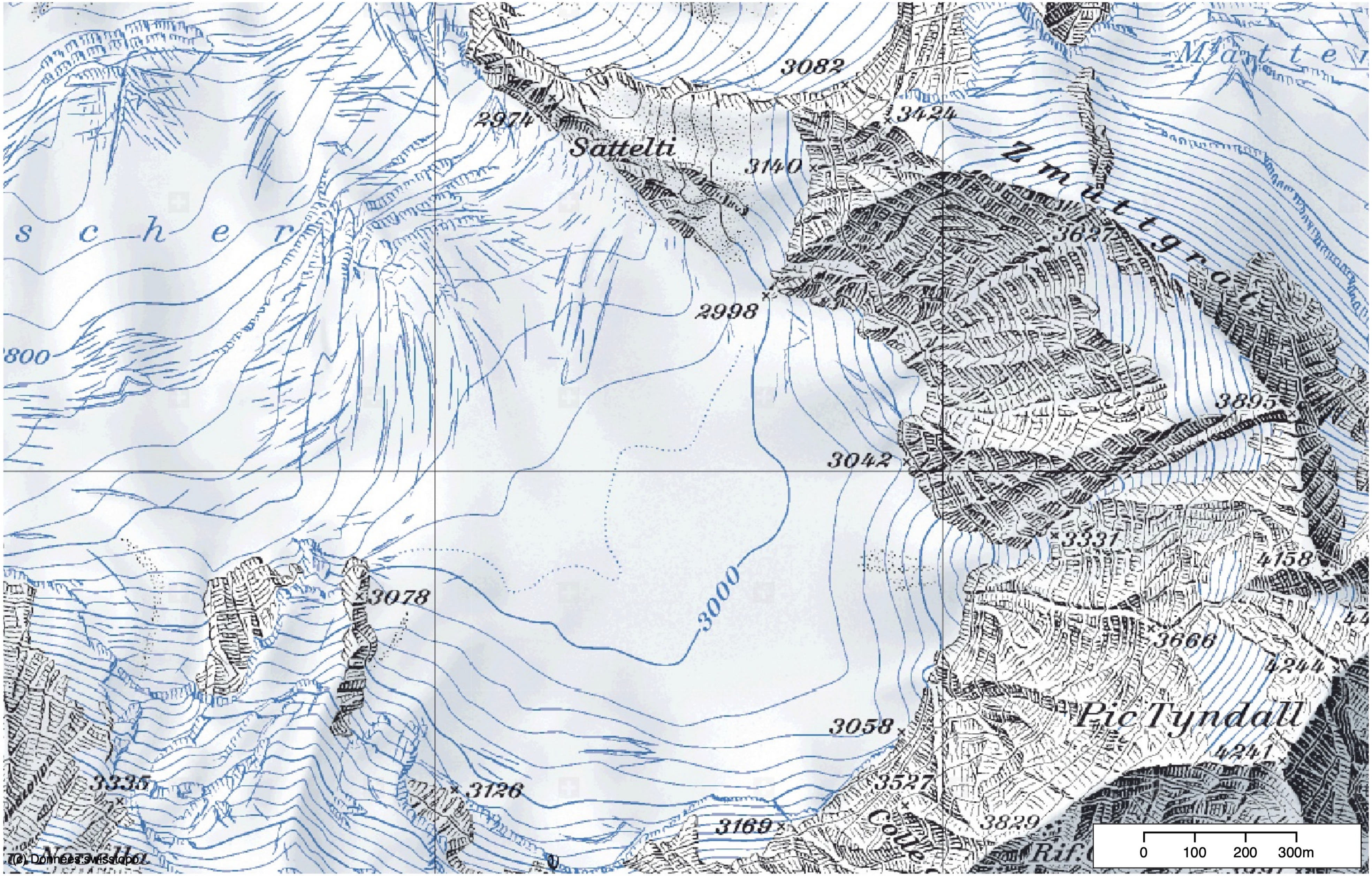
www.geo.admin.ch

geo.admin.ch, le géoportail fédéral

Echelle 1: 10,000



Echelle 1: 10,000

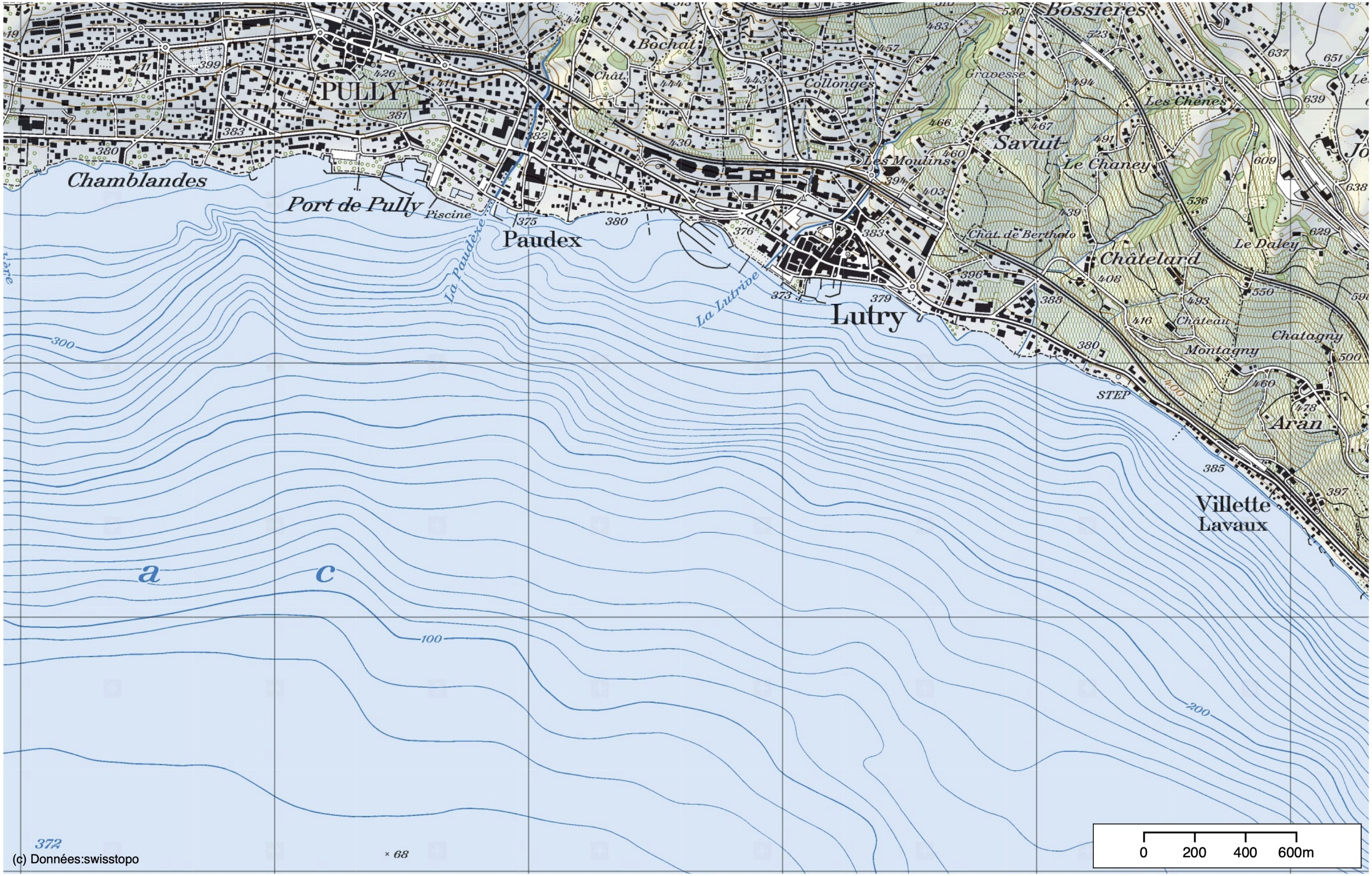


map.geo.admin.ch

www.geo.admin.ch

geo.admin.ch, le géoportail fédéral

Echelle 1: 20,000



www.geo.admin.ch est un portail d'accès aux informations géolocalisées, données et services qui sont mis à disposition par l'administration fédérale

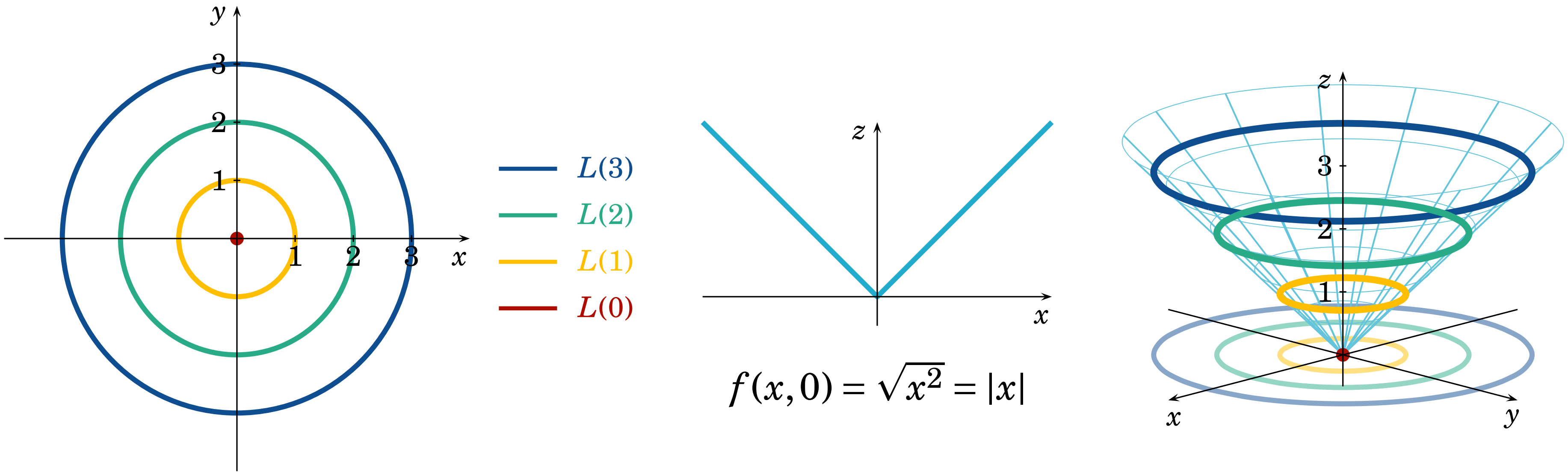
Exemples

1. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

   Nous avons $\mathrm{Im}(f)=[0,\infty[$. Comme

$$f(x,y)=c \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sqrt{x^2+y^2}=c \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2+y^2=c^2$$

   la courbe de niveau $c>0$ de la fonction f est le cercle de rayon c centré à l'origine et la courbe de niveau 0 est le point $(0,0)$.



$f(x,0)=\sqrt{x^2}=|x|$

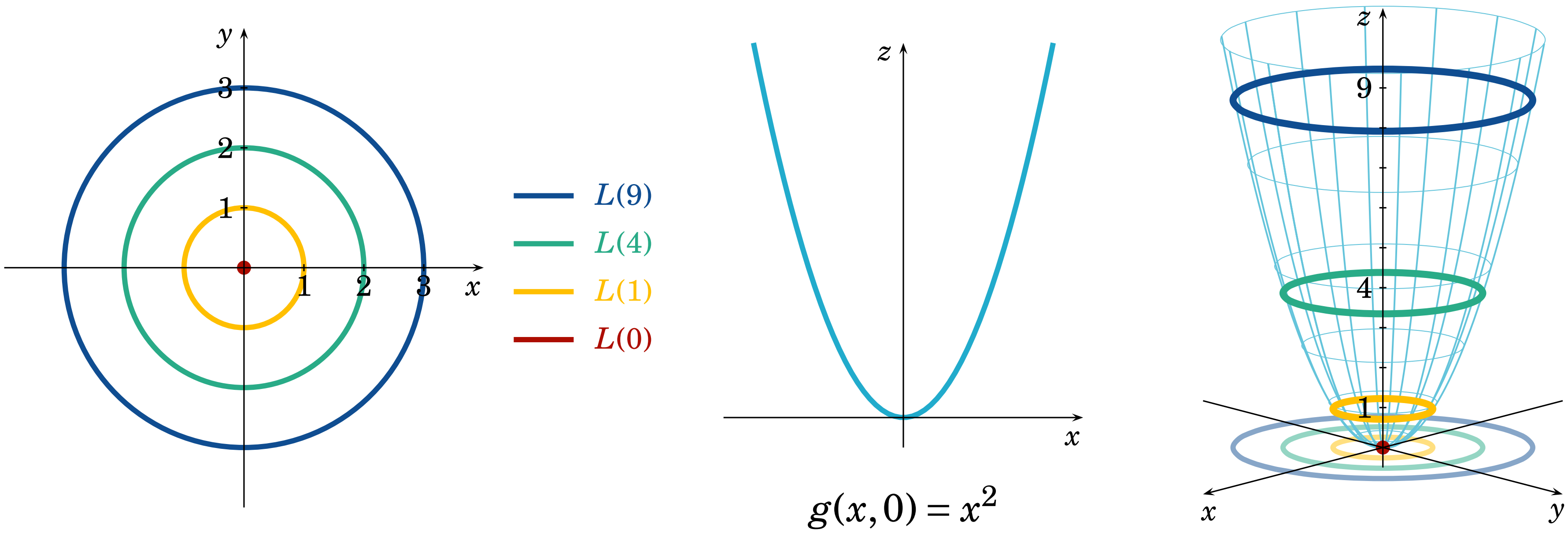
Courbes de niveau, coupe verticale en $y=0$ et graphe de la fonction f

2. $g(x,y) = x^2 + y^2$.

Nous avons $\mathrm{Im}(g) = [0,\infty[$. Comme

$$g(x,y) = c \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 + y^2 = c \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 + y^2 = (\sqrt{c}\,)^2$$

la courbe de niveau $c > 0$ de la fonction g est le cercle de rayon $\sqrt{c}$ centré à l'origine et la courbe de niveau 0 est le point $(0,0)$.



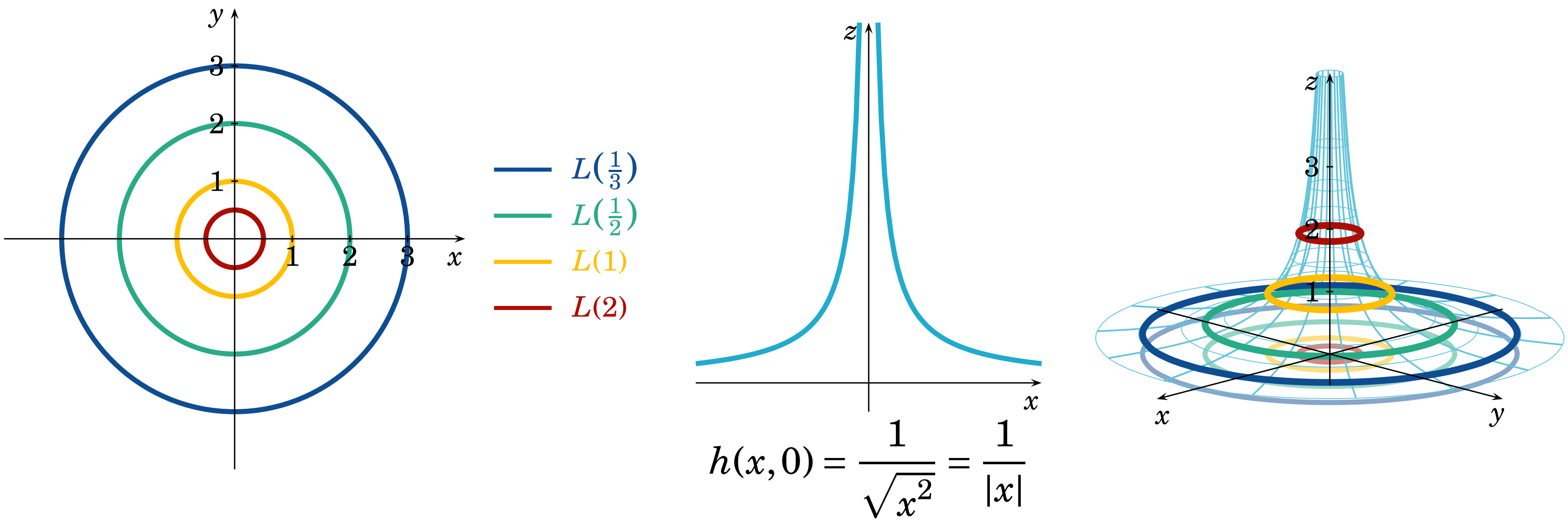
Courbes de niveau, coupe verticale en $y = 0$ et graphe de la fonction g

3. $h(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Nous avons $\mathrm{Im}(h) =]0,\infty[$. Comme

$$h(x,y) = c \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = c \quad\Longleftrightarrow\quad x^2+y^2 = \frac{1}{c^2}$$

la courbe de niveau $c > 0$ de la fonction h est le cercle de rayon $\frac{1}{c}$ centré à l'origine.



Courbes de niveau, coupe verticale en $y = 0$ et graphe de la fonction h

4. Déterminer les courbes de niveau de la fonction

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\,.$$

Le domaine de la fonction f est $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Les points de la courbe de niveau c satisfont l'équation

$$f(x,y) = c \quad\Longleftrightarrow\quad x^2 - y^2 = c(x^2 + y^2) \quad\Longleftrightarrow\quad (1-c)x^2 = (1+c)y^2$$

Considérons quelques cas particuliers :

- Si $c = 1$ alors $y^2 = 0$ et $L(1)$ est la droite $y = 0$.
- Si $c = -1$ alors $x^2 = 0$ et $L(-1)$ est la droite $x = 0$.
- Si $c = 0$ alors $y^2 = x^2$ et $L(0)$ est formée des deux droites $y = \pm x$.

Revenons au cas général :

$$(1-c)x^2 = (1+c)y^2$$

Comme $x^2 \geqslant 0$ et $y^2 \geqslant 0$, si $1+c$ et $1-c$ ont des signes différents, alors la seule solution de l'équation $(1-c)x^2 = (1+c)y^2$ est $(x,y) = (0,0)$, ce qui n'est pas possible car $(0,0) \notin D(f)$. Par conséquent dans ce cas, l'ensemble $L(c)$ est vide.

Ainsi, pour avoir des solutions, il faut avoir

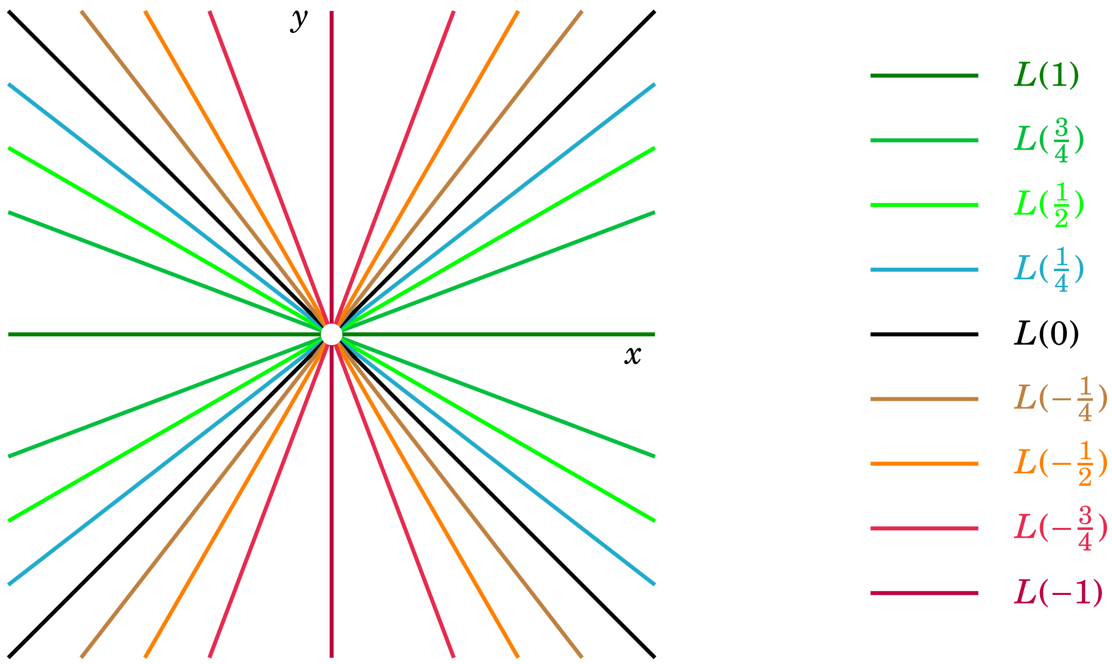
$$(1-c)(1+c) \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1-c^2 \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \geqslant c^2 \quad \Longleftrightarrow \quad -1 \leqslant c \leqslant 1$$

Si $-1 < c < 1$, alors on a

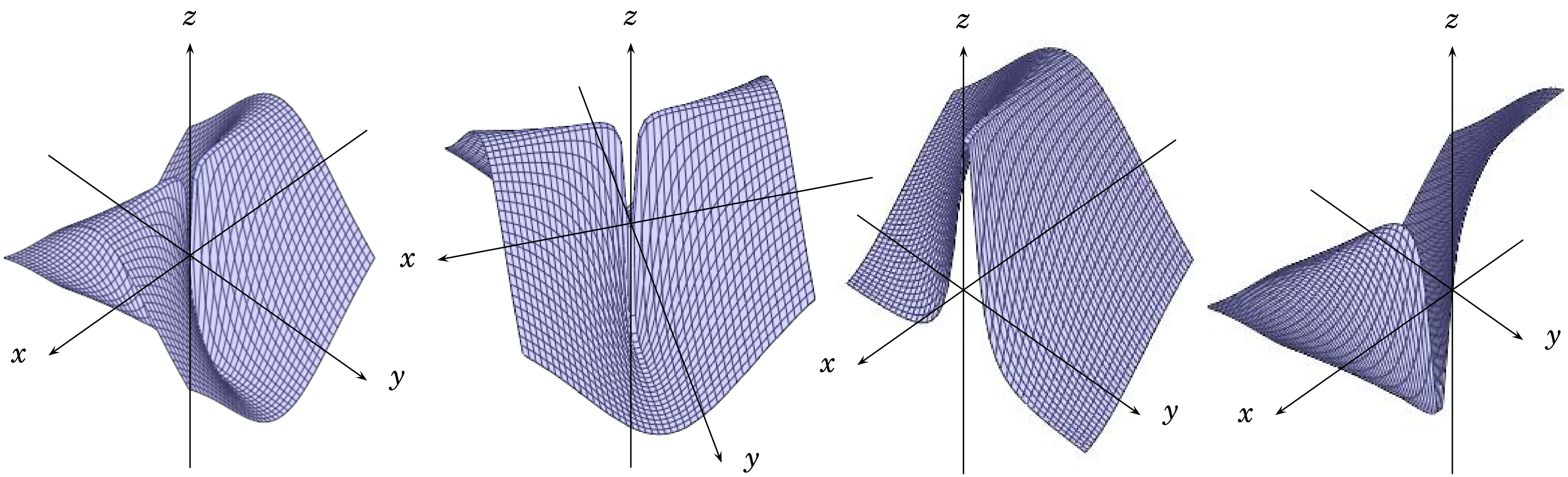
$$y^2 = \frac{1-c}{1+c}x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{\frac{1-c}{1+c}}\,x$$

et $L(c)$ est formée de deux droites.

Ainsi par exemple, $L(-\frac{1}{2})$ est formée des deux droites $y = \pm\sqrt{3}\,x$.



Quelques courbes de niveau de f



Quelques esquisses du graphe de f

Surfaces de niveau

Dans le cas général, on peut définir :

Définition. Soit f une fonction de n variables. Les *surfaces de niveau* de f sont les sous-ensembles de $D(f) \subset \mathbb{R}^n$ pour lesquels f est constante.

Si $c \in \mathrm{Im}(f)$, la *surface de niveau c* de f est le sous-ensemble

$$L(c) = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : f(x_1, \ldots, x_n) = c\right\} \subset \mathbb{R}^n .$$

Si $c \notin \mathrm{Im}(f)$, on pose $L(c) = \emptyset$.

Exemple

Soit $f(x,y,z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$.

Ici $\mathrm{Im}(f) = [0,1]$, la surface de niveau $0 \leqslant c \leqslant 1$ étant la sphère de centre $(0,0,0)$ et de rayon $\sqrt{1-c^2}$:

$$f(x,y,z) = c \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2} = c \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 - c^2$$