

3.13. Dérivée d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

Rappel: Théorème fondamental du calcul intégral

Si $g \in C^0(\mathbb{R})$, alors

$$\int_a^b g(x) dx = G(b) - G(a) \quad \text{où } G \text{ est une primitive de } g.$$

En particulier, nous avons vu que

$$H(t) = \int_a^t g(x) dx$$

est la primitive de g qui vaut 0 en $t=a$:

$$H(a) = \int_a^a g(x) dx = 0$$

$$H'(t) = g(t)$$

Généralisation :

$$\int_{a(t)}^{b(t)} g(x) dx = G(b(t)) - G(a(t)) \text{ où } G \text{ est une primitive de } g.$$

Si l'on suppose que a et b sont des fonctions de classe C^1 , alors la dérivation par rapport à t nous donne :

$$\begin{aligned} \left(\int_{a(t)}^{b(t)} g(x) dx \right)' &= (G(b(t)) - G(a(t)))' \\ &= g(b(t)) \underbrace{b'(t)}_{= \text{dérivée interne}} - g(a(t)) \underbrace{a'(t)}_{= \text{dérivée interne}} \end{aligned}$$

Proposition.

Soient $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ et $a, b \in C^1(\mathbb{R})$. Soit

$$F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx$$

alors

$$F'(t) = f(b(t), t) b'(t) - f(a(t), t) a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx \quad (*)$$

Cas particulier:

Soient $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ et $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$. Soit

$$F(t) = \int_{a_0}^{b_0} f(x, t) dx$$

alors

$$F'(t) = \int_{a_0}^{b_0} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx \quad (**)$$

Idee de preuve de (**):

$$\text{Soit } F(t) = \int_{a_0}^{b_0} f(x, t) dx$$

$$\text{On a: } F'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_{a_0}^{b_0} f(x, t+h) dx - \int_{a_0}^{b_0} f(x, t) dx \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{a_0}^{b_0} \frac{f(x, t+h) - f(x, t)}{h} dx$$

$$= \int_{a_0}^{b_0} \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, t+h) - f(x, t)}{h} \right) dx = \int_{a_0}^{b_0} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$$

comme $\frac{\partial f}{\partial t}$ est continue, pour tout t fixé et pour tout $\varepsilon > 0$

il existe $\delta > 0$ tel que si $|h| < \delta$ (indépendant de $x \in [a_0, b_0]$)

$$\text{alors } \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) - \frac{f(x, t+h) - f(x, t)}{h} \right| < \varepsilon$$



Preuve de (*):

$$\text{Soit } g(a, b, t) = \int_a^b f(x, t) dx = - \int_b^a f(x, t) dx$$

fonction de trois variables. On a:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial a}(a, b, t) &= -f(a, t) \\ \frac{\partial g}{\partial b}(a, b, t) &= f(b, t) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{théorème fondamental} \\ \text{du calcul intégral} \end{array}$$

$$\frac{\partial g}{\partial t}(a, b, t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx \quad (\text{par } (**))$$

Comme $F(t) = g(a(t), b(t), t) = (g \circ \vec{\varphi})(t)$ où $\vec{\varphi}(t) = (a(t), b(t), t)$.

nous avons $F'(t) = \vec{\nabla} g(\vec{\varphi}(t)) \cdot \vec{\varphi}'(t)$ avec $\vec{\varphi}'(t) = (a'(t), b'(t), 1)$.

Autrement dit,

$$F'(t) = -f(a(t), t) a'(t) + f(b(t), t) b'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx \quad \blacksquare$$

Exemples.

1. Soit $F(t) = \int_0^\pi \frac{\sin(tx)}{x} dx$. Calculer $F'(\frac{1}{2})$.

La fonction $f(x, t) = \frac{\sin(tx)}{x}$ est une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ telle que $f(0, t) = t$.

$$\begin{aligned} \text{On a: } F'(t) &= \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sin(tx)}{x} \right) dx = \int_0^\pi \frac{\cos(tx) \cdot x}{x} dx \\ &= \int_0^\pi \cos(tx) dx = \left[\frac{\sin(tx)}{t} \right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{\sin(\pi t)}{t} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } F'(\frac{1}{2}) = 2 \sin(\frac{\pi}{2}) = 2$$

2. Soit maintenant $F(t) = \int_t^{t^2} \frac{\sin(tx)}{x} dx$. Calculer $F'(\frac{1}{2})$.

On a :

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{\sin(t \cdot t^2)}{t^2} \cdot \underbrace{(t^2)'}_{=2t} - \frac{\sin(t \cdot t)}{t} \cdot \underbrace{(t)'}_{=1} + \int_t^{t^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sin(tx)}{x} \right) dx \\ &= \frac{2}{t} \sin(t^3) - \frac{1}{t} \sin(t^2) + \left[\frac{\sin(tx)}{t} \right]_{x=t}^{x=t^2} \\ &= \frac{2}{t} \sin(t^3) - \frac{1}{t} \sin(t^2) + \frac{1}{t} \sin(t^3) - \frac{1}{t} \sin(t^2) \\ &= \frac{3}{t} \sin(t^3) - \frac{2}{t} \sin(t^2) \end{aligned}$$

$$\text{d'où } F'(\frac{1}{2}) = 6 \sin(\frac{1}{8}) - 4 \sin(\frac{1}{4})$$