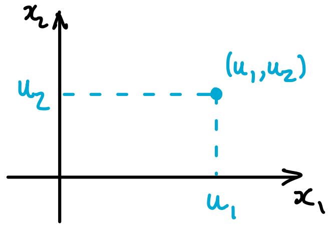
Chapitre 2. L'espace $\mathbb{R}^n$

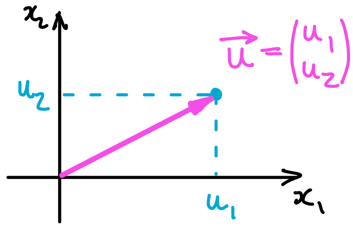
Rappel.

L'ensemble des vecteurs à deux composantes est appelé $\mathbb{R}^2$.

Les éléments de $\mathbb{R}^2$ sont de la forme $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, avec $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$

On va identifier les points du plan avec les vecteurs de $\mathbb{R}^2$:

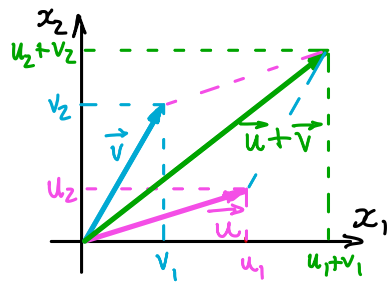




On écrira parfois (x,y) au lieu de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ pour parler du vecteur de composantes x, y.

Attention. Ne pas confondre (x,y) avec $(x \ \ y)$ (matrice de taille $1{\times}2$)

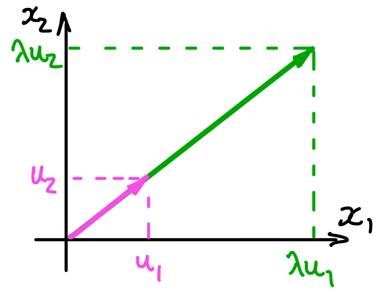
Addition de vecteurs de $\mathbb{R}^2$:



Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}$$

Multiplication d'un vecteur par un scalaire :



Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\lambda \vec{u} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \end{pmatrix}$$

De manière générale, on peut définir $\mathbb{R}^n$, avec $n \geq 3$, comme l'ensemble des vecteurs de la forme

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad \text{avec } u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{R}$$

muni des opérations

– addition de vecteurs : $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{pmatrix}$, pour tout $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

– multiplication par un scalaire : $\lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix}$, pour tout $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

Remarque.

On va identifier le n-tuple $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ au vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel :

1. Commutativité de l'addition : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$
2. Associativité de l'addition : $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ pour tout $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$
3. Elément neutre pour l'addition : le vecteur $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ est tel que :
   $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ et $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$
4. Inverse : Le vecteur $-\vec{u} = (-1)\vec{u}$ est tel que
   $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ et $(-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$
5. $c(\vec{u} + \vec{v}) = c\vec{u} + c\vec{v}$ pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$
6. $(c+d)\vec{u} = c\vec{u} + d\vec{u}$ pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ et $c, d \in \mathbb{R}$
7. $c(d\vec{u}) = (cd)\vec{u}$ pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ et $c, d \in \mathbb{R}$
8. $1\vec{u} = \vec{u}$ pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

Définition. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Le nombre réel

$$\boxed{\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{u}^T \vec{v}}$$

est appelé **produit scalaire (euclidien)** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On le note aussi $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, alors on a :

$$\boxed{\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{u}^T \vec{v} = (u_1 \cdots u_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j}$$

Remarque.

Il est possible de définir d'autres produits scalaires sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème. Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

1. $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$ (commutativité)
2. $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$ (distributivité)
3. $(\lambda \vec{u}) \bullet \vec{v} = \vec{u} \bullet (\lambda \vec{v}) = \lambda (\vec{u} \bullet \vec{v})$
4. $\vec{u} \bullet \vec{u} \geq 0$ pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

   De plus : $\vec{u} \bullet \vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$

Preuve.

1. On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^T \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$

   et $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{v}^T \vec{u} = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n$

2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) \overset{\text{déf}}{=} \vec{u}^T (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}^T \vec{v} + \vec{u}^T \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

3. $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = (\lambda \vec{u})^T \vec{v} = \lambda \vec{u}^T \vec{v} = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v})$

   $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \vec{u}^T (\lambda \vec{v}) = \lambda \vec{u}^T \vec{v} = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v})$

4. $\vec{u} \cdot \vec{u} = \underbrace{u_1^2}_{\geq 0} + \underbrace{u_2^2}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{u_n^2}_{\geq 0} \geq 0$

   Pour avoir une somme nulle, il faut que chaque terme soit nul : $u_j^2 = 0$ pour tout j. Autrement dit, $u_j = 0$ pour tout j. ■

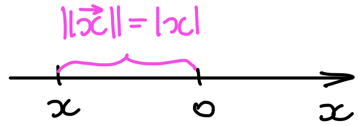
2.1. Norme et distance.

Définition. Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. La norme (euclidienne) ou longueur du vecteur $\vec{x}$ est le nombre

$$\boxed{\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}} \geq 0$$

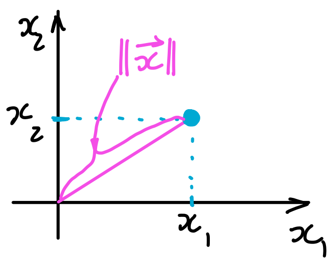
Remarque. Pour des calculs théoriques, on utilise plutôt la formule $\|\vec{x}\|^2 = \vec{x} \cdot \vec{x}$.

Cas particuliers :



$n=1$: $\|\vec{x}\| = \sqrt{x^2} = |x|$ (valeur absolue)

$n=2$: $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$



Propriétés.

1. Positivité : $\|\vec{x}\| \geq 0$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

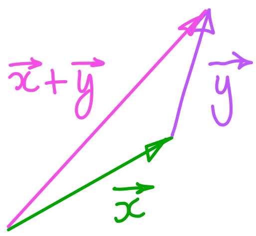
   De plus, $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

2. Homogénéité :

$$\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\| \text{ pour tout } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}$$

3. Inégalité triangulaire :

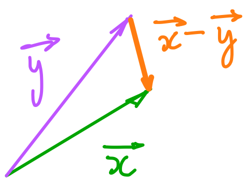
$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \text{ pour tout } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \qquad (T)$$



Définition. Soient $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. On définit la distance entre $\vec{x}$ et $\vec{y}$ par

$$\boxed{d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|}$$

Geométriquement :



Propriétés.

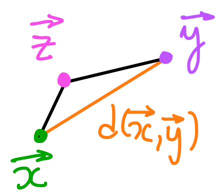
1. Positivité : $d(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0$ pour tout $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

   De plus, $d(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$

2. Symétrie : $d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x})$ pour tout $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

3. Inégalité triangulaire :

$$d(\vec{x}, \vec{y}) \leq d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{z}, \vec{y}) \text{ pour tout } \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$$



Inégalités importantes :

1. inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\vec{x}\cdot\vec{y}| \leqslant \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\| \quad \text{pour tout } \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n \qquad (CS)$$

[car $\vec{x}\cdot\vec{y} = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\cos\theta$]

2. inégalité triangulaire inverse :

$$\big|\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|\big| \leqslant \|\vec{x}-\vec{y}\| \quad \text{pour tout } \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n \qquad (TI)$$

Remarques.

(CS) $\Rightarrow$ (T) : En effet,

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = (\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{x}\cdot\vec{x} + 2\vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{y}\cdot\vec{y}$$
$$= \|\vec{x}\|^2 + 2\vec{x}\cdot\vec{y} + \|\vec{y}\|^2 \leqslant \|\vec{x}\|^2 + 2|\vec{x}\cdot\vec{y}| + \|\vec{y}\|^2$$
$$\overset{(CS)}{\leqslant} \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 = (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2$$

d'où $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

(T) $\Rightarrow$ (TI) : En effet,

$$\left.\begin{array}{l} \|\vec{x}\| = \|(\vec{x}-\vec{y})+\vec{y}\| \overset{(T)}{\leqslant} \|\vec{x}-\vec{y}\| + \|\vec{y}\| \\ \|\vec{y}\| = \|(\vec{y}-\vec{x})+\vec{x}\| \overset{(T)}{\leqslant} \|\vec{y}-\vec{x}\| + \|\vec{x}\| \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}-\vec{y}\| \\ \|\vec{y}\| - \|\vec{x}\| \leqslant \|\vec{y}-\vec{x}\| \end{array}\right.$$

d'où $\big|\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|\big| \leqslant \|\vec{x}-\vec{y}\|$

2.2. Sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$

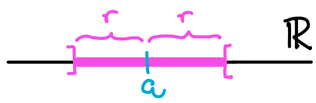
Définition. Soit $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ et $r>0$. L'ensemble

$$\boxed{B(\vec{a}, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : d(\vec{x}, \vec{a}) < r\} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{a}\| < r\}}$$

est appelé boule ouverte de centre $\vec{a}$ et rayon r.

Cas particuliers :

$n=1$: $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < r\}$

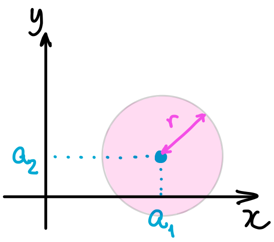


$\Rightarrow \boxed{B(a,r) = \,]a-r, a+r[}$ (intervalle ouvert)

$n=2$: $B((a_1,a_2),r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2} < r\}$

$\Rightarrow \boxed{B((a_1,a_2),r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 < r^2\}}$

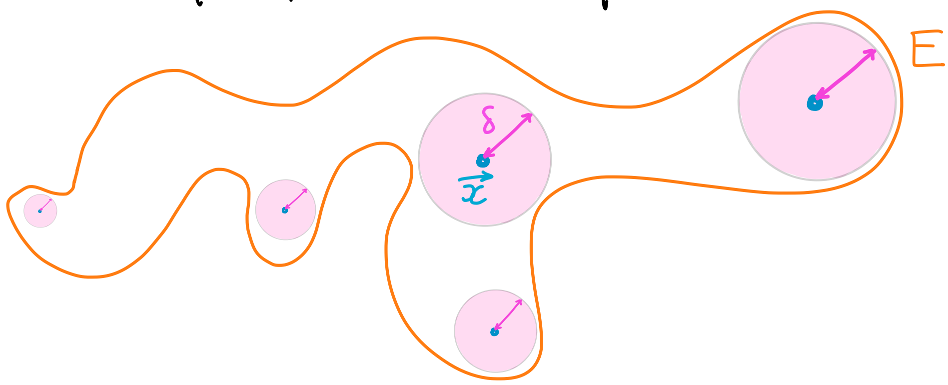
(disque ouvert de rayon r et centre $(a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2$)



Définition.

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ (on note $E \subset \mathbb{R}^n$).

On dit que $\vec{x} \in E$ est un point intérieur à E s'il existe un nombre $\delta > 0$ (qui dépend de $\vec{x}$) tel que $B(\vec{x}, \delta) \subset E$.



L'ensemble $\boxed{\mathring{E} = \{\vec{x} \in E : \text{il existe } \delta>0 \text{ tel que } B(\vec{x},\delta) \subset E\}}$

de tous les points intérieurs à E est appelé l'intérieur de E.

Remarque.

Par construction, $\boxed{\mathring{E} \subset E}$.

Définition.

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$. On dit que E est **ouvert** si tous les éléments de E sont des points intérieurs à E:

$$\boxed{E = \mathring{E}}$$

Autrement dit, E est ouvert si pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un nombre $\delta > 0$ (qui dépend de $\vec{x}$) tel que $B(\vec{x}, \delta) \subset E$.

Convention.

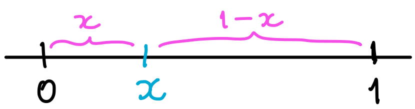
L'ensemble vide ϕ est ouvert.

Exemples.

1. $E = \mathbb{R}^n$ est ouvert. En effet, pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ nous avons

$$B(\vec{x}, 1) \subset \mathbb{R}^n$$

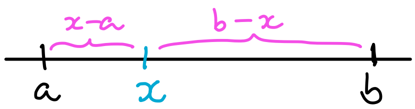
2. $E =]0,1[\subset \mathbb{R}$ est ouvert.



En effet, si $x \in]0,1[$, alors $\delta = \min(x, 1-x) > 0$ est tel que

$$B(x, \delta) =]x-\delta, x+\delta[\subset]0,1[$$

3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.



$E =]a,b[\subset \mathbb{R}$ est ouvert.

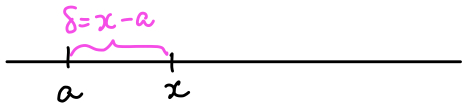
En effet, si $x \in]a,b[$, alors $\delta = \min(x-a, b-x) > 0$ est tel que

$$B(x, \delta) =]x-\delta, x+\delta[\subset]a,b[.$$

4. $E =]a, \infty[\subset \mathbb{R}$ est ouvert pour tout $a \in \mathbb{R}$.

En effet, si $x \in E$, alors $x > a$ et $\delta = x - a > 0$ est tel que

$$B(x, \delta) =]x - \delta, x + \delta[\subset E$$



5. $E =]0,1] \subset \mathbb{R}$ n'est pas ouvert car $1 \in E$ n'est pas un point intérieur vu qu'il n'existe pas de nombre $\delta > 0$ tel que

$$]1-\delta, 1+\delta[= B(1, \delta) \subset]0,1]$$

Proposition. La boule ouverte de centre $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ et rayon $r > 0$:

$$B(\vec{a}, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{a}\| < r\}$$

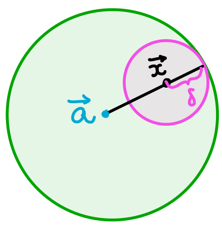
est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Preuve. Soit $\vec{x} \in B(\vec{a}, r)$. Nous avons

$$\|\vec{x} - \vec{a}\| < r \iff 0 < r - \|\vec{x} - \vec{a}\|$$

Ainsi, en posant $\delta = r - \|\vec{x} - \vec{a}\| > 0$ nous trouvons

$$B(\vec{x}, \delta) \subset B(\vec{a}, r)$$



En effet, si $\vec{y} \in B(\vec{x}, \delta)$, alors $\|\vec{y} - \vec{x}\| < \delta$ et

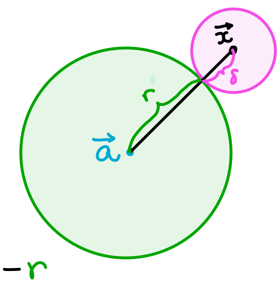
$$\|\vec{y} - \vec{a}\| = \|(\vec{y} - \vec{x}) + (\vec{x} - \vec{a})\| \overset{(T)}{\leq} \|\vec{y} - \vec{x}\| + \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta + \|\vec{x} - \vec{a}\|$$

$$\Rightarrow \|\vec{y} - \vec{a}\| < r \Rightarrow \vec{y} \in B(\vec{a}, r)$$

■

Proposition. Soit $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ et $r \geqslant 0$. L'ensemble
$$E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{a}\| > r\}$$
est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Preuve. Soit $\vec{x} \in E$. Nous avons
$$\|\vec{x} - \vec{a}\| > r \iff 0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| - r$$



Ainsi, en posant $\delta = \|\vec{x} - \vec{a}\| - r > 0$ nous trouvons
$$B(\vec{x}, \delta) \subset E$$
En effet, si $\vec{y} \in B(\vec{x}, \delta)$, alors $\|\vec{y} - \vec{x}\| < \delta = \|\vec{x} - \vec{a}\| - r$

d'où : $r < \|\vec{x} - \vec{a}\| - \|\vec{y} - \vec{x}\| \leqslant \big|\, \|\vec{x} - \vec{a}\| - \|\vec{x} - \vec{y}\| \,\big| \overset{(TI)}{\leqslant} \|\vec{y} - \vec{a}\|$

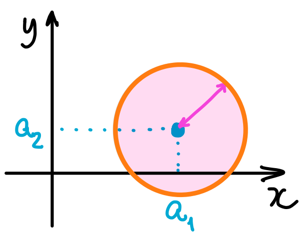
$\Rightarrow \|\vec{y} - \vec{a}\| > r \Rightarrow \vec{y} \in E$ ■

Définition.

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que E est *fermé* si le sous-ensemble complémentaire $E^c = \mathbb{R}^n \setminus E$ est ouvert.

Exemples.

1. $E = \,]-\infty, 0] \subset \mathbb{R}$ est fermé car $E^c = \,]0, \infty[$ est ouvert
2. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 \leqslant r^2\} \subset \mathbb{R}^2$ est fermé car $E^c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 > r^2\}$ est ouvert.



Remarques.

- L'ensemble vide $E=\phi$ est fermé car nous avons montré que $E^c=\mathbb{R}^n\setminus\phi=\mathbb{R}^n$ est ouvert.
- L'ensemble $E=\mathbb{R}^n$ est fermé car nous avons postulé que l'ensemble vide $E^c=\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{R}^n=\phi$ est ouvert.
- L'ensemble vide ϕ et $\mathbb{R}^n$ sont les seuls sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ qui sont à la fois ouverts et fermés.

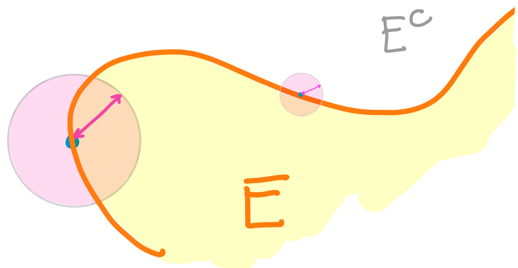
Définition.

Soit $E\subset\mathbb{R}^n$ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$.

On dit que $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ est un point frontière de E si pour tout nombre $r>0$ nous avons

$$B(\vec{x},r)\cap E\neq\phi$$

$$\text{et}\quad B(\vec{x},r)\cap E^c\neq\phi$$



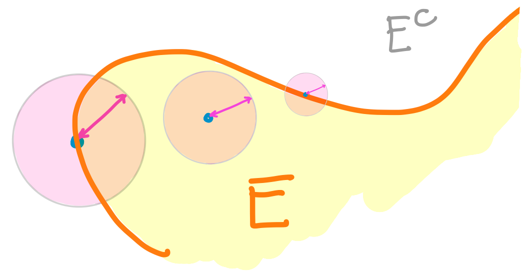
L'ensemble de tous les points frontière de E est appelé le bord (ou frontière) de E, noté ∂E [∂ : lettre "d" arrondie]

Définition.

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$.

On dit que $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ est un point adhérent à E si pour tout nombre $r > 0$ nous avons

$$B(\vec{x}, r) \cap E \neq \emptyset$$



L'ensemble de tous les points adhérents à E est appelé l'adhérence de E, noté $\overline{E}$.

Par construction, $\boxed{E \subset \overline{E}}$ et $\boxed{\partial E \subset \overline{E}}$.

Exemples.

1. Soit $E =]0,1] \subset \mathbb{R}$

- $0 \notin E$ est un point adhérent à E car

$$]-r, r[\cap E =]0, r[\neq \emptyset \text{ si } 0 < r \leq 1$$

et $]-r, r[\cap E = E \neq \emptyset$ si $r > 1$

Ainsi $\overline{E} = [0, 1]$

- $1 \in E$ est un point adhérent à $E^c =]-\infty, 0] \cup]1, \infty[$ car

$$]1-r, 1+r[\cap E^c =]1, 1+r[\neq \emptyset \text{ si } 0 < r < 1$$

$$]1-r, 1+r[\cap E^c =]1-r, 0] \cup]1, 1+r[\neq \emptyset \text{ si } r \geq 1$$

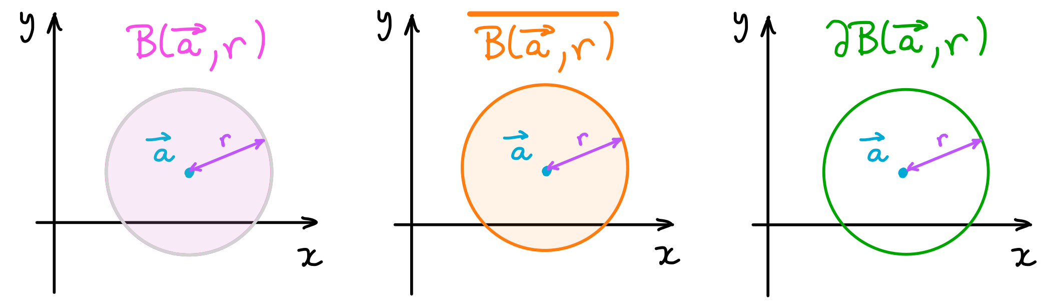
Ainsi, $\overline{E^c} =]-\infty, 0] \cup [1, \infty[$ et $\partial E = \{0, 1\} = \partial E^c$

2. Soit $\quad B(\vec{a},r)=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n : \|\vec{x}-\vec{a}\|<r\}$ (boule ouverte)

Nous avons :

$$B(\vec{a},r)^c=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n : \|\vec{x}-\vec{a}\|\geqslant r\} \quad \text{(complément)}$$
$$\overline{B(\vec{a},r)}=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n : \|\vec{x}-\vec{a}\|\leqslant r\} \quad \text{(adhérence)}$$
$$\partial B(\vec{a},r)=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n : \|\vec{x}-\vec{a}\|= r\} \quad \text{(bord)}$$

$n=2$:



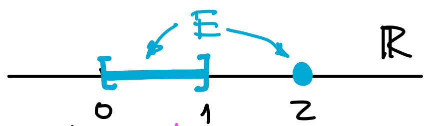
Définition.

Soit $E\subset\mathbb{R}^n$ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$.

On dit que $\vec{x}\in E$ est un point isolé de E s'il existe un nombre $r>0$ tel que $\quad B(\vec{x},r)\cap E=\{\vec{x}\}$

Exemple.

Soit $E=[0,1]\cup\{2\}$



$x=2$ est un point isolé de E car en prenant $r=\frac{1}{2}$

nous avons $B(2,\frac{1}{2})=]2-\frac{1}{2},2+\frac{1}{2}[=]\frac{3}{2},\frac{5}{2}[$

d'où $B(2,\frac{1}{2})\cap E=\{2\}$.

[$x=2$ est un point frontière mais n'est pas un point intérieur]

Conséquences des définitions.

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble non-vide.

Nous avons :

1. $\mathring{E} \subset E \subset \overline{E}$
2. $\overline{E} = \mathring{E} \sqcup \partial E$ (réunion disjointe)
3. $\mathring{E} = E \iff E$ est ouvert
4. $E = \overline{E} \iff E$ est fermé
5. $\mathring{E}$ est le plus grand ouvert contenu dans E.
6. $\overline{E}$ est le plus petit fermé qui contient E.
7. $\partial E = \overline{E} \cap \overline{E^c}$

Définition.

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$.

- On dit que E est **borné** s'il existe un nombre $M \geq 0$ tel que

$$\|\vec{x}\| \leq M \quad \text{pour tout } \vec{x} \in E$$

  Autrement dit, si E peut être contenu dans une boule de rayon fini.

- On dit que E est **compact** si E est fermé et borné.

Exemples.

1. Si $E \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble borné, alors son adhérence $\overline{E}$ est un ensemble compact.
2. Tout intervalle fermé $[a,b] \subset \mathbb{R}$, avec $a \leq b$ est compact.

2.3. Autres normes (et distances) sur $\mathbb{R}^n$.

De manière générale, une norme sur $\mathbb{R}^n$ est une application qui associe à chaque élément $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ un nombre $|||\vec{x}||| \in \mathbb{R}$ telle que les trois propriétés suivantes sont satisfaites:

1. Positivité : $|||\vec{x}||| \geqslant 0$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

   De plus, $|||\vec{x}||| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$

2. Homogénéité :

$$|||\lambda \vec{x}||| = |\lambda| \, |||\vec{x}||| \text{ pour tout } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}$$

3. Inégalité triangulaire :

$$|||\vec{x} + \vec{y}||| \leqslant |||\vec{x}||| + |||\vec{y}||| \text{ pour tout } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$$

Exemples importants

- $\|\vec{x}\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2} = \|\vec{x}\|$ (norme euclidienne)
- $\|\vec{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$
- Plus généralement :

  $\|\vec{x}\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$, avec $p > 1$
- $\|\vec{x}\|_\infty = \max_{k \in \{1, \ldots, n\}} \{|x_k|\}$

(voir série 6)

Remarques.

- Si $n=1$, alors $\vec{x}=(x)$ et

$$\|\vec{x}\|_2 = |x| = \|\vec{x}\|_1 = \|\vec{x}\|_\infty = \|\vec{x}\|_p \quad \text{pour tout } p>1.$$

- Si $n>1$, alors en général nous n'avons plus l'égalité.

Par exemple, si $n=2$ et $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ alors :

$$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5$$

$$\|\vec{x}\|_1 = |3| + |-4| = 7$$

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max(|3|, |-4|) = 4$$

On remarque que

$$\|\vec{x}\|_\infty \leqslant \|\vec{x}\|_2 \leqslant \|\vec{x}\|_1$$

Définition.

Deux normes $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ sont équivalentes s'il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que

$$c_1 \|\vec{x}\|_a \leqslant \|\vec{x}\|_b \leqslant c_2 \|\vec{x}\|_a \quad \text{, pour tout } \vec{x}\in\mathbb{R}^n$$

Théorème (sans démonstration)

Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

Cas particuliers (voir série 6) :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\vec{x}\|_1 \leqslant \|\vec{x}\|_2 \leqslant \|\vec{x}\|_1 \quad \Leftrightarrow \quad \|\vec{x}\|_2 \leqslant \|\vec{x}\|_1 \leqslant \sqrt{n}\,\|\vec{x}\|_2$$

$$\|\vec{x}\|_\infty \leqslant \|\vec{x}\|_2 \leqslant \sqrt{n}\,\|\vec{x}\|_\infty \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{n}}\|\vec{x}\|_2 \leqslant \|\vec{x}\|_\infty \leqslant \|\vec{x}\|_2$$

De manière générale, une distance sur $\mathbb{R}^n$ est une application qui associe à chaque couple d'éléments $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ un nombre $d(\vec{x}, \vec{y})$ telle que les trois propriétés suivantes sont satisfaites:

1. Positivité : $d(\vec{x}, \vec{y}) \geqslant 0$ pour tout $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

   De plus, $d(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$

2. Symétrie : $d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x})$ pour tout $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

3. Inégalité triangulaire :

   $d(\vec{x}, \vec{y}) \leqslant d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{z}, \vec{y})$ pour tout $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$

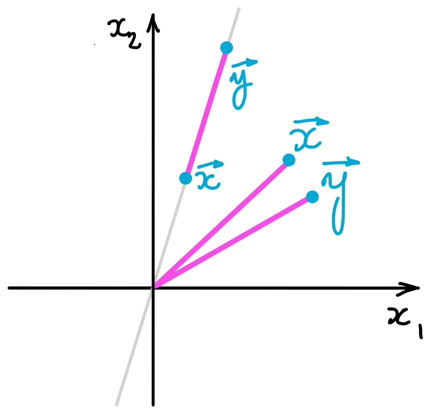
Exemple important :

distance euclidienne : $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$

Exemple anecdotique (dans $\mathbb{R}^2$) :

distance SNCF :

$$d_{SNCF}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{cases} \|\vec{x} - \vec{y}\| & \text{si } \vec{x} = \lambda \vec{y} \\ \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| & \text{sinon} \end{cases}$$



2.4. Suites dans $\mathbb{R}^n$.

Rappels. (Analyse I)

Définition. Une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ est une application

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$k \mapsto f(k) = x_k$$

Notation: $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ou $(x_k)_{k\geq 0}$ ou (x_k)

Exemples.

$\left(\frac{1}{k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, $(k^2)_{k\in\mathbb{N}}$, $\left(\frac{1}{k!}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, etc.

Définition. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ et $a\in\mathbb{R}$.

On dit que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers a, noté

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} x_k = a}$$

si pour tout $\varepsilon>0$, il existe un nombre $N\in\mathbb{N}$ (qui dépend de ε) tel que $|x_k - a| < \varepsilon$ pour tout $k\geq N$.

Autrement dit, si x_k est suffisamment proche de a dès que k est assez grand : à partir d'un certain k, tous les x_k se trouvent dans l'intervalle ouvert $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$.

Définition. Une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}$ est *bornée* s'il existe un nombre $C>0$ tel que $|x_k| \leq C$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.
Autrement dit, si *tous* les x_k se trouvent dans l'intervalle fermé $[-C, C]$.

Définition. Une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}$ est une *suite de Cauchy* si pour tout $\varepsilon>0$, il existe un nombre $N\in\mathbb{N}$ (qui dépend de ε) tel que $|x_k - x_j| < \varepsilon$ pour tout $j,k \geq N$

Définition. Soit $f: \begin{array}{l}\mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ j \mapsto f(j)\end{array}$ une application strictement croissante.

La suite d'éléments de $\mathbb{R}$ définie par $\begin{array}{l}\mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ j \mapsto x_{f(j)}\end{array}$ est une *sous-suite* de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Suites dans $\mathbb{R}^n$.

Définition. Une *suite* d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est une application

$$f: \begin{array}{l}\mathbb{N} \to \mathbb{R}^n \\ k \mapsto f(k) = \vec{x}_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,n})\end{array}$$

Notation: $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ou $(\vec{x}_k)_{k\geq 0}$ ou $(\vec{x}_k)$

Exemples.

$\left(\frac{1}{k+1}, k^2, \frac{1}{k!}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, etc.

Définition. Soit $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$ et $\vec{a}\in\mathbb{R}^n$.
On dit que la suite $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\vec{a}$, noté

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} \vec{x}_k = \vec{a}}$$

si pour tout $\varepsilon>0$, il existe un nombre $N\in\mathbb{N}$ (qui dépend de ε) tel que $\|\vec{x}_k-\vec{a}\|<\varepsilon$ pour tout $k\geqslant N$
Autrement dit, si $\vec{x}_k$ est suffisamment proche de $\vec{a}$ dès que k est assez grand : à partir d'un certain k, tous les $\vec{x}_k$ se trouvent dans la boule ouverte $B(\vec{a},\varepsilon)$.

Définition. Une suite $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est bornée s'il existe un nombre $C>0$ tel que $\|\vec{x}_k\|\leqslant C$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.
Autrement dit, si tous les $\vec{x}_k$ se trouvent dans la boule fermée $\overline{B(\vec{0},C)}$.

Définition. Une suite $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est une suite de Cauchy si pour tout $\varepsilon>0$, il existe un nombre $N\in\mathbb{N}$ (qui dépend de ε) tel que $\|\vec{x}_k-\vec{x}_j\|<\varepsilon$ pour tout $j,k\geqslant N$

Définition. Soit $f:\begin{array}{l}\mathbb{N}\to\mathbb{N}\\ j\mapsto f(j)\end{array}$ une application strictement croissante.
La suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$ définie par $\begin{array}{l}\mathbb{N}\to\mathbb{R}^n\\ j\mapsto \vec{x}_{f(j)}\end{array}$ est une sous-suite de $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Propriétés des suites d'éléments de $\mathbb{R}^n$.

Proposition. Soit $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$ et soit $\vec{a}\in\mathbb{R}^n$.
Soient $(x_{k,1})_{k\in\mathbb{N}}, (x_{k,2})_{k\in\mathbb{N}}, \dots, (x_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}$ les n suites numériques formées avec les composantes de $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
Nous avons :

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} \vec{x}_k = \vec{a} \iff \lim_{k\to\infty} x_{k,j} = a_j \text{ pour tout } j\in\{1,\dots,n\}}$$

Preuve.

$\Rightarrow$) Par hypothèse, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un nombre $N\in\mathbb{N}$ (qui dépend de ε) tel que $\|\vec{x}_k-\vec{a}\|<\varepsilon$ pour tout $k\geq N$

A voir : $|x_{k,j}-a_j|<\varepsilon$ pour tout $k\geq N$ et $j\in\{1,\dots,n\}$

On a : $|x_{k,j}-a_j| \leq \max_{j\in\{1,\dots,n\}} |x_{k,j}-a_j| = \|\vec{x}_k-\vec{a}\|_\infty$
$\leq \|\vec{x}_k-\vec{a}\| < \varepsilon$ pour tout $k\geq N$

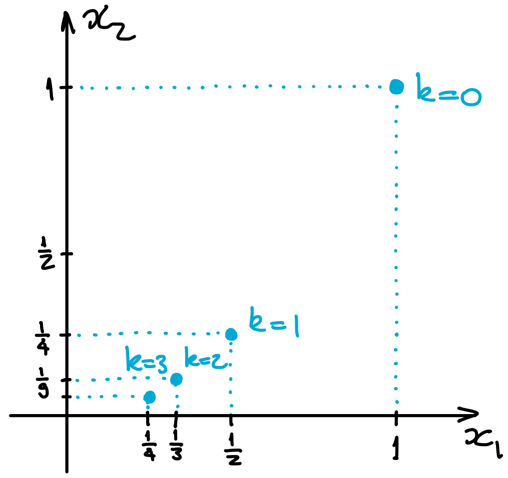
$\Leftarrow$) Par hypothèse, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un nombre $N_j\in\mathbb{N}$ (qui dépend de ε) tel que $|x_{k,j}-a_j|<\varepsilon$ pour tout $k\geq N_j$ et $j\in\{1,\dots,n\}$. A voir : $\lim_{k\to\infty}\vec{x}_k=\vec{a}$

On a : $\|\vec{x}_k-\vec{a}\| \leq \|\vec{x}_k-\vec{a}\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_{k,j}-a_j|$
$< n\varepsilon$ pour tout $k\geq \max_j N_j$ ∎

Exemple.

Nous avons vu que $\left(\frac{1}{k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{(k+1)^2}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sont des suites numériques convergentes vers 0.

Par conséquent, la suite $\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{(k+1)^2}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $(0,0)$.



Proposition. Soit $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$.

Soient $(x_{k,1})_{k\in\mathbb{N}}, (x_{k,2})_{k\in\mathbb{N}}, \dots, (x_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}$ les n suites numériques formées avec les composantes de $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Nous avons :

$$\left.\begin{array}{l}(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est une} \\ \text{suite de Cauchy}\end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l}(x_{k,j})_{k\in\mathbb{N}} \text{ est une suite de} \\ \text{Cauchy pour tout } j\in\{1,\dots,n\}\end{array}\right.$$

Théorème.

Si $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente d'éléments de $\mathbb{R}^n$, alors $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée.

Preuve.

Supposons que $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\vec{a}\in\mathbb{R}^n$.

Il existe donc $N\in\mathbb{N}$ tel que $\|\vec{x}_k-\vec{a}\|<1$ pour tout $k\geq N$.

L'inégalité triangulaire implique

$$\|\vec{x}_k\| = \|(\vec{x}_k-\vec{a})+\vec{a}\| \leq \|\vec{x}_k-\vec{a}\|+\|\vec{a}\| < 1+\|\vec{a}\|$$

pour tout $k\geq N$. Par conséquent,

$$\|\vec{x}_k\| \leq \max\left(\|\vec{x}_0\|, \|\vec{x}_1\|, \dots, \|\vec{x}_{N-1}\|, 1+\|\vec{a}\|\right) = M \qquad \blacksquare$$

Conséquence importante.

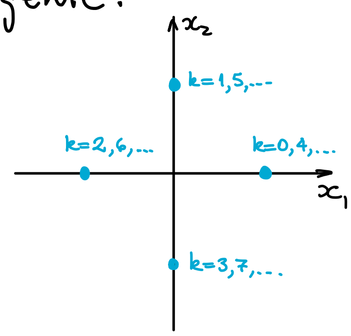
Si $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas une suite bornée d'éléments de $\mathbb{R}^n$, alors $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas une suite convergente.

Attention.

Si $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée d'éléments de $\mathbb{R}^n$, alors on ne peut rien conclure au sujet de la convergence:

La suite $\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{(k+1)^2}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée et convergente.

Par contre, la suite $\left(\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée mais pas convergente:



Théorème de Bolzano-Weierstrass.

Soit $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite bornée d'éléments de $\mathbb{R}^n$.

Alors il est possible d'extraire une sous-suite convergente.

Rappel.

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$.

- E est un ensemble ouvert si pour tout $\vec{x}\in E$, il existe un nombre $\delta>0$ (qui dépend de $\vec{x}$) tel que $B(\vec{x},\delta)\subset E$.
- E est un ensemble fermé si $E^c=\mathbb{R}^n\setminus E$ est ouvert.

Nous allons donner maintenant une caractérisation d'ensemble fermé à l'aide des suites:

Théorème. Soit E un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}^n$

Nous avons l'équivalence :

$$E \text{ est fermé} \iff \begin{cases} \text{toute suite d'éléments de } E \text{ qui est convergente} \\ \text{converge vers un élément de } E. \end{cases}$$

Preuve.

$\Rightarrow$) Supposons que E est fermé.

Soit $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers $\vec{a}\in\mathbb{R}^n$, telle que $\vec{x}_k\in E$, pour tout $k\in\mathbb{N}$.

A voir : $\vec{a}\in E$.

Supposons par l'absurde que $\vec{a} \notin E$, c'est-à-dire $\vec{a} \in E^c$.

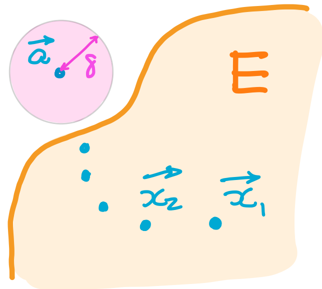
Comme par hypothèse E est fermé, l'ensemble E^c est ouvert.

Par conséquent, il existe $\delta > 0$ tel que $B(\vec{a}, \delta) \subset E^c$.

Comme $\vec{x}_k \in E$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\{\vec{x}_k : k \in \mathbb{N}\} \cap B(\vec{a}, \delta) = \emptyset,$$

en contradiction avec le fait que $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\vec{a} \in E^c$.



Par conséquent, $\vec{a} \in E$.

$\Leftarrow$) Supposons maintenant que toute suite convergente $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ avec $\vec{x}_k \in E$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ converge vers un élément de E.

A voir : E est fermé.

Supposons par l'absurde que E n'est pas fermé.

Par conséquent, $E^c = \mathbb{R}^n \setminus E$ n'est pas ouvert.

Il existe donc $\vec{a} \in E^c$ tel que

$$B(\vec{a}, \delta) \not\subset E^c \text{ pour tout } \delta > 0.$$

Autrement dit, $B(\vec{a}, \delta) \cap E \neq \emptyset$ pour tout $\delta > 0$.

En particulier, $B(\vec{a}, \frac{1}{k+1}) \cap E \neq \emptyset$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On peut donc choisir $\vec{x}_k \in B(\vec{a}, \frac{1}{k+1}) \cap E$ pour chaque $k \in \mathbb{N}$.

Par construction, la suite $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E converge vers $\vec{a} \notin E$, en contradiction avec l'hypothèse. ■

Conséquence.

Pour obtenir l'adhérence $\overline{E}$ d'un ensemble E (c'est-à-dire le plus petit fermé qui contient E), il suffit de rajouter à E tous les $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ qui sont limites de suites convergentes d'éléments de E.

Exemple.

Soit $E = [0,1[$.

Comme $x_k = \frac{k}{k+1} \in E$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\lim_{k\to\infty} x_k = 1$ nous avons $\overline{E} = [0,1]$.

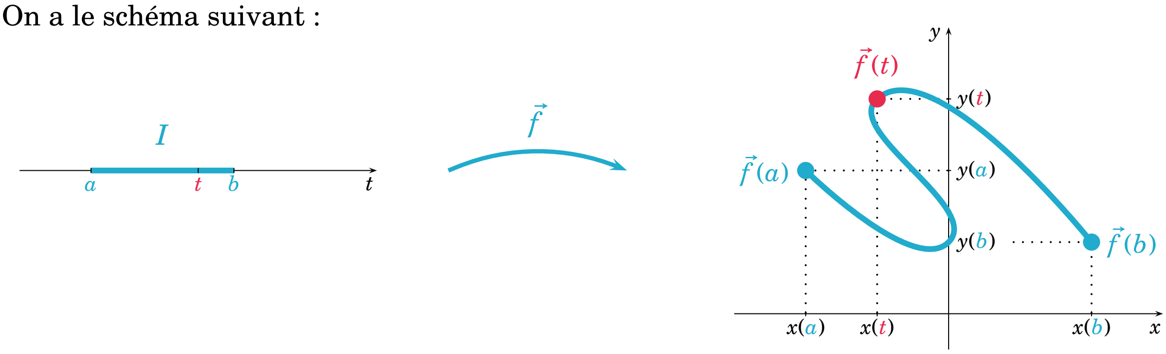
2.4. Courbes paramétrées dans $\mathbb{R}^2$

Définition. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle.
Soients $x : I \to \mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues d'une variable réelle.
On définit la fonction

$$\begin{aligned} \vec{f} : I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

appelée *courbe paramétrée*.

On a le schéma suivant :

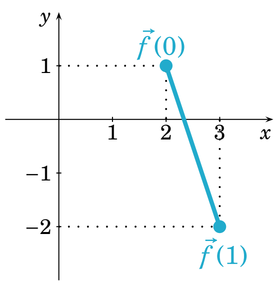


L'image de $\vec{f}$ est appelée *trace* de la courbe paramétrée.
La variable t est appelée *paramètre*.

Remarques.

- La paramétrisation d'une courbe paramétrée n'est pas unique.
- Si $I = [a, b]$, alors le point $\vec{f}(a)$ est appelé le *point de départ* et le point $\vec{f}(b)$ est appelé le *point d'arrivée*.
- Si l'on prend l'intervalle $I = [0, 1]$, on parle plutôt de *chemin*.
- On peut voir $\vec{f}(t)$ comme la position au temps t du crayon servant à dessiner la courbe.

Exemples



1. $$\begin{aligned}\vec{f} : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (2+t, 1-3t)\end{aligned}$$
   Nous avons
   $$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+t \\ 1-3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \text{avec } t \in [0,1]$$
   Equation du segment de droite qui relie le point $(2, 1)$ au point $(3, -2)$
2. De manière générale,
   $$\vec{f}(t) = (x_0 + at,\ y_0 + bt), \qquad \text{avec } t \in [0,1]$$
   est le segment qui relie les points (x_0, y_0) et $(x_0 + a, y_0 + b)$.

3. $\vec{f}(t) = \big(\cos(t),\ \sin(t)\big)$, avec $t \in [0, 2\pi]$

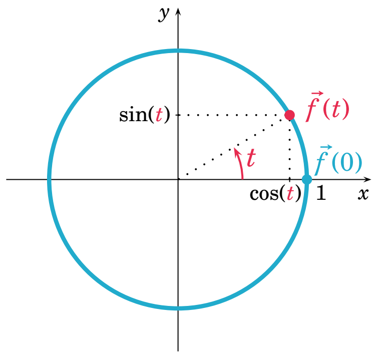
est le cercle de rayon 1 centré à l'origine

$t = 0$: $\vec{f}(0) = (1, 0)$

$t = \frac{\pi}{2}$: $\vec{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1)$

$t = \pi$: $\vec{f}(\pi) = (-1, 0)$

$t = \frac{3\pi}{2}$: $\vec{f}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0, -1)$



4. $\vec{f}(t) = \big(R\cos(t),\ R\sin(t)\big)$, avec $t \in [0, 2\pi]$

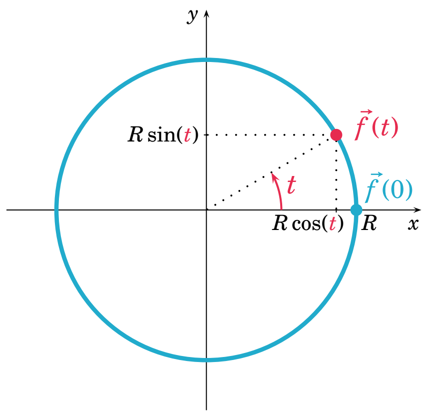
est le cercle de rayon R centré à l'origine

$t = 0$: $\vec{f}(0) = (R, 0)$

$t = \frac{\pi}{2}$: $\vec{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, R)$

$t = \pi$: $\vec{f}(\pi) = (-R, 0)$

$t = \frac{3\pi}{2}$: $\vec{f}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0, -R)$



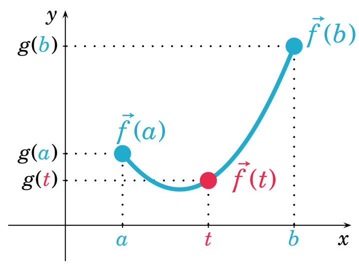
5. $\vec{f}(t) = \big(x_0 + R\cos(t),\ y_0 + R\sin(t)\big)$, avec $t \in [0, 2\pi]$

est le cercle de rayon R centré en (x_0, y_0)

6. Si $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors

$$\vec{f}(t) = \big(t,\ g(t)\big), \quad \text{avec } t \in [a, b]$$

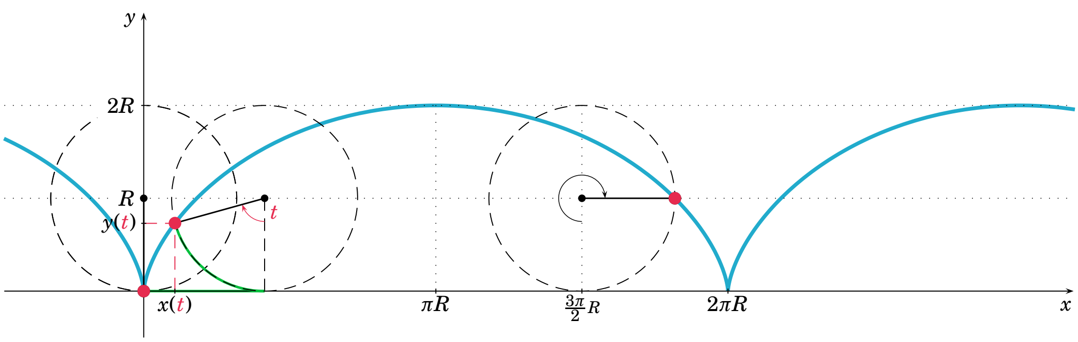
est une paramétrisation du graphe de g.



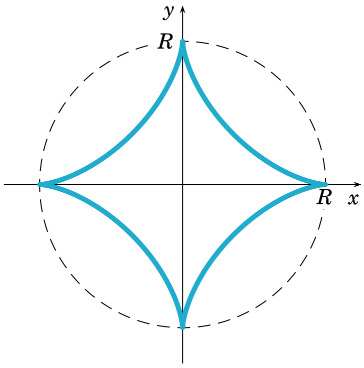
7. Cycloïde (trajectoire de la valve d'une roue de vélo, Mersenne et Galilée, 1599)

Paramétrisation :

$$\vec{f}(t) = \big(x(t), y(t)\big) \quad \text{où} \quad \begin{cases} x(t) = R\big(t - \sin(t)\big), \\ y(t) = R\big(1 - \cos(t)\big), \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$



8. Astroïde (Rømer, 1674)



Equation implicite : $x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}$

autrement dit, $\left(\underbrace{\left(\frac{x}{R}\right)^{1/3}}_{=\cos(t)}\right)^2 + \left(\underbrace{\left(\frac{y}{R}\right)^{1/3}}_{=\sin(t)}\right)^2 = 1$

Paramétrisation :

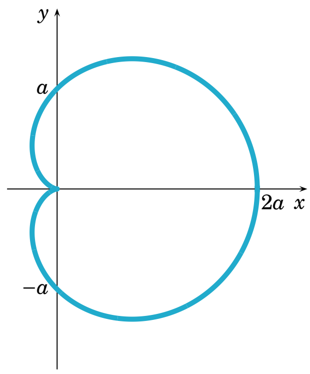
$$\begin{cases} x(t) = R\cos^3(t), \\ y(t) = R\sin^3(t), \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

9. Cardioïde (Rømer, 1674)

Equation implicite : $(x^2+y^2)^2 - 2ax(x^2+y^2) = a^2y^2$, avec $a > 0$

Paramétrisation :

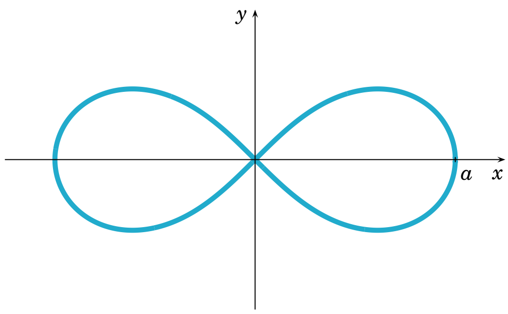
$$\begin{cases} x(t) = a\cos(t)\big(1+\cos(t)\big), \\ y(t) = a\sin(t)\big(1+\cos(t)\big), \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$



Deuxième paramétrisation

$$\begin{cases} x(u) = \dfrac{2a(1-u^2)}{(1+u^2)^2}, \\ y(u) = \dfrac{4au}{(1+u^2)^2}, \end{cases} \quad \text{avec } u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$$

10. Lemniscate de Bernoulli (Jakob Bernoulli, 1694)



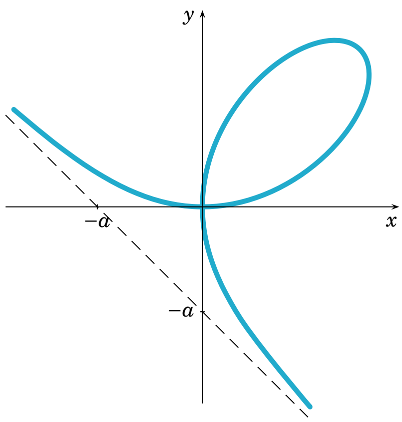
Equation implicite :

$(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = 0$, avec $a > 0$

Paramétrisation :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{a\cos(t)}{1+\sin^2(t)}, \\ y(t) = \dfrac{a\sin(t)\cos(t)}{1+\sin^2(t)}, \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

11. Feuille (folium) de Descartes (1638)



Equation implicite :

$x^3 + y^3 = 3axy$, avec $a > 0$

Paramétrisation :

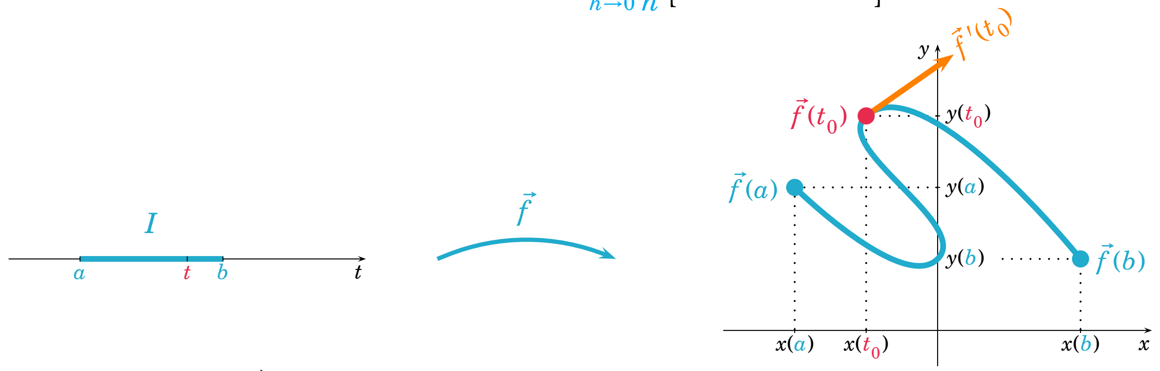
$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y(t) = \dfrac{3at^2}{1+t^3}, \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$$

Définition. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $\vec{f} : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée

$$\vec{f}(t) = \big(x(t), y(t)\big) \qquad \text{avec } t \in I\,.$$

On dit que la courbe paramétrée $\vec{f}$ est *dérivable en* $t_0 \in I$ si les fonctions $x : I \to \mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{R}$ sont dérivables en $t_0 \in I$. Dans ce cas, le vecteur $\big(x'(t_0),\, y'(t_0)\big)$ est appelé le *vecteur tangent* à la courbe paramétrée au point $\vec{f}(t_0)$, noté $\vec{f}\,'(t_0)$. Nous avons :

$$\vec{f}\,'(t_0) = \big(x'(t_0),\, y'(t_0)\big) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\vec{f}(t_0 + h) - \vec{f}(t_0)\right]$$



Le vecteur tangent $\vec{f}\,'(t)$ indique la direction et le sens de parcours de la courbe au temps t. Sa norme nous donne la vitesse de parcours.

On dit que la courbe paramétrée $\vec{f}$ est *dérivable* si elle est dérivable en tout $t_0 \in I$.

Exemple

Considérons la paramétrisation

$$\vec{f}(t) = \big(\cos(t),\, \sin(t)\big), \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

Nous avons

$$\vec{f}\,'(t) = \big(-\sin(t),\, \cos(t)\big)$$

Quelques cas particuliers :

$t = 0$: $\vec{f}\,'(0) = (0, 1)$

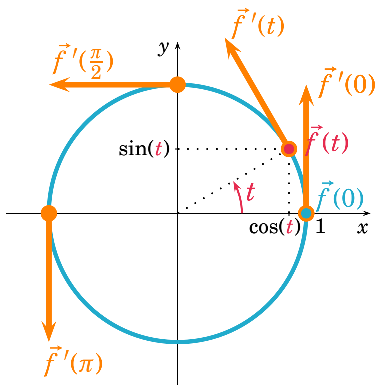
$t = \frac{\pi}{2}$: $\vec{f}\,'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1, 0)$

$t = \pi$: $\vec{f}\,'(\pi) = (0, -1)$

De plus, comme

$$\|\vec{f}\,'(t)\| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1\,,$$

la vitesse de parcours est constante.



Définition. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $\vec{f} : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée

$$\vec{f}(t) = \big(x(t), y(t)\big) \qquad \text{avec } t \in I.$$

Soit $k \geqslant 1$ un entier. Si les dérivées $x^{(m)}$ et $y^{(m)}$ existent et sont continues sur I pour tout $1 \leqslant m \leqslant k$, alors on dit que la courbe paramétrée $\vec{f}$ est *de classe C^k*.
Si $\vec{f}$ est de classe C^k pour tout $k \geqslant 1$, alors on dit que $\vec{f}$ est *de classe C^∞*.

Définition. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $\vec{f} : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée de classe C^1

$$\vec{f}(t) = \big(x(t), y(t)\big) \qquad \text{avec } t \in I.$$

On dit que la courbe paramétrée $\vec{f}$ est *singulière en $t_0 \in I$* si $\vec{f}\,'(t_0) = \vec{0}$. Le point $\vec{f}(t_0)$ est appelé *point singulier de $\vec{f}$*.
On dit que la courbe paramétrée $\vec{f}$ est *régulière en $t_0 \in I$* si $\vec{f}\,'(t_0) \neq \vec{0}$.
On dit que la courbe paramétrée $\vec{f}$ est *régulière* si $\vec{f}\,'(t) \neq \vec{0}$ pour tout $t \in I$.

Exemples

1. Le cercle paramétré par
$$\vec{f}(t) = \big(x_0 + R\cos(t),\ y_0 + R\sin(t)\big), \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R},$$
est tel que $\vec{f}\,'(t) = \big(-R\sin(t),\ R\cos(t)\big)$.
Par conséquent, il s'agit d'une courbe régulière.
2. Le graphe de la fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ paramétré par
$$\vec{f}(t) = \big(t,\ g(t)\big), \qquad \text{avec } t \in [a,b],$$
est tel que $\vec{f}\,'(t) = \big(1, g'(t)\big) \neq (0,0)$.
Par conséquent, il s'agit d'une courbe régulière si g' est une fonction continue.
3. La cycloïde paramétrée par
$$\vec{f}(t) = \big(R(t - \sin t),\ R(1 - \cos t)\big), \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R},$$
est telle que $\vec{f}\,'(t) = \big(R(1 - \cos t),\ R\sin t\big)$.
Par conséquent, la cycloïde *n'est pas* une courbe régulière car les points
$$\vec{f}(2\pi k) = (2\pi k R, 0), \qquad \text{avec } k \in \mathbb{Z},$$
sont des points singuliers de $\vec{f}$.

2.5. Longueur d'une courbe

Définition. Soit $\vec{f} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée de classe C^1 :

$$\vec{f}(t) = \big(x(t), y(t)\big), \qquad \text{avec } t \in [a,b].$$

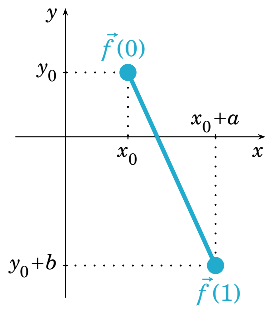
Nous appelons *longueur de la courbe* $\vec{f}$ le nombre

$$\mathcal{L} = \int_a^b \|\vec{f}\,'(t)\|\,dt,$$

où $\|\vec{f}\,'(t)\| = \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}$.

Exemples

1. *Longueur d'un segment de droite*



Nous savons par la géométrie que la longueur du segment qui relie les points (x_0, y_0) et $(x_0 + a, y_0 + b)$ est égale à

$$\mathcal{L} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Nous pouvons retrouver le même résultat à l'aide de la formule

$$\mathcal{L} = \int_a^b \|\vec{f}\,'(t)\|\,dt.$$

En effet, soit

$$\vec{f}(t) = (x_0 + at,\ y_0 + bt), \qquad \text{avec } t \in [0,1]$$

la paramétrisation du segment qui relie les points (x_0, y_0) et $(x_0 + a, y_0 + b)$. Comme le vecteur tangent est le vecteur constant $\vec{f}\,'(t) = (a,b)$, la longueur du segment est

$$\mathcal{L} = \int_0^1 \|\vec{f}\,'(t)\|\,dt = \int_0^1 \sqrt{a^2+b^2}\,dt = \sqrt{a^2+b^2}\,\Big[t\Big]_0^1 = \sqrt{a^2+b^2}.$$

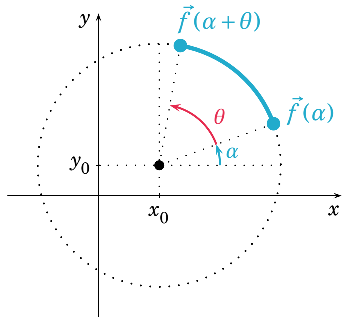
2. *Longueur d'un arc de cercle*

Nous savons par la géométrie que la longueur d'un arc de cercle de rayon R et angle θ est égale à

$$\mathcal{L} = R\theta\,.$$

Nous pouvons retrouver le même résultat à l'aide de la formule

$$\mathcal{L} = \int_a^b \|\vec{f}\,'(t)\|\,dt\,.$$



En effet, soit

$$\vec{f}(t) = \big(x_0 + R\cos(t),\ y_0 + R\sin(t)\big), \qquad \text{avec } t \in [\alpha, \alpha+\theta],$$

la paramétrisation d'un arc de cercle de rayon R. Comme $\vec{f}\,'(t) = \big(-R\sin(t),\ R\cos(t)\big)$ et

$$\|\vec{f}\,'(t)\| = \sqrt{\big(-R\sin(t)\big)^2 + \big(R\cos(t)\big)^2} = R\,,$$

la longueur de l'arc de cercle est :

$$\mathcal{L} = \int_\alpha^{\alpha+\theta} \|\vec{f}\,'(t)\|\,dt = \int_\alpha^{\alpha+\theta} R\,dt = R\Big[t\Big]_\alpha^{\alpha+\theta} = R\theta\,.$$

Si $\theta = 2\pi$ nous retrouvons $\mathcal{L} = 2\pi\rho$ (périmètre du cercle)

3. *Longueur du graphe d'une fonction*

Nous avons vu que si $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors

$$\vec{f}(t) = \big(t, g(t)\big), \qquad \text{avec } t \in [a,b]$$

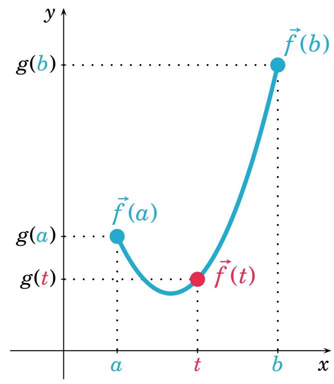
est une paramétrisation du graphe de g.

Comme le vecteur tangent est $\vec{f}\,'(t) = \big(1, g'(t)\big)$, nous avons

$$\|\vec{f}\,'(t)\|^2 = 1 + \big(g'(t)\big)^2\,.$$

Ainsi, si g' est une fonction continue, la longueur cherchée est

$$\mathcal{L} = \int_a^b \sqrt{1 + \big(g'(t)\big)^2}\,dt\,.$$



2.6. Courbes paramétrées dans $\mathbb{R}^n$

La notion de courbe paramétrée se généralise naturellement lorsqu'on passe de $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{R}^n$:

Définition. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé. Soient $x_1 : I \to \mathbb{R}, \ldots, x_n : I \to \mathbb{R}$ n fonctions continues d'une variable. On définit la fonction

$$\vec{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$t \longmapsto \big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big)$$

appelée *courbe paramétrée*.
L'image de $\vec{f}$ est appelée *trace* de la courbe paramétrée.
La variable t est appelée *paramètre*.
On dit que la courbe paramétrée $\vec{f}$ est *dérivable en $t_0 \in I$* si $x_1 : I \to \mathbb{R}, \ldots, x_n : I \to \mathbb{R}$ sont dérivables en $t_0 \in I$. Dans ce cas, le vecteur $\big(x_1'(t_0), \ldots, x_n'(t_0)\big)$ est appelé le *vecteur tangent* à la courbe paramétrée au point $\vec{f}(t_0)$, noté $\vec{f}\,'(t_0)$. Nous avons :

$$\vec{f}\,'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\vec{f}(t_0 + h) - \vec{f}(t_0)\right].$$

Si la courbe paramétrée $\vec{f}$ est de classe C^1, la *longueur de la courbe $\vec{f}$* est le nombre

$$\mathcal{L} = \int_a^b \|\vec{f}\,'(t)\|\, dt.$$

Exemple

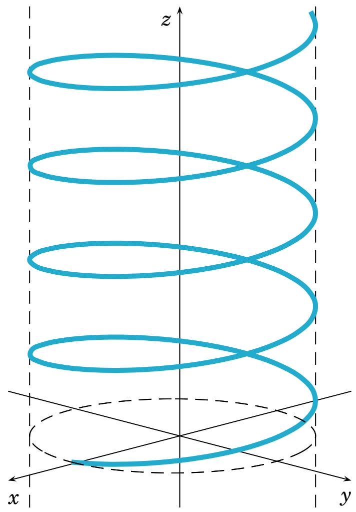
Hélice circulaire dans l'espace

Paramétrisation :

$$\vec{f}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$$

où

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t), \\ y(t) = \sin(t), \\ z(t) = \dfrac{h}{2\pi}\, t \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$



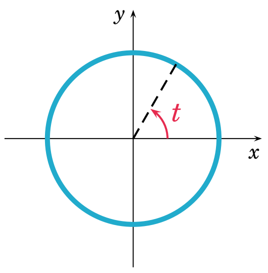
Comme nous avons

$$\vec{f}\,'(t) = \left(-\sin(t),\ \cos(t),\ \frac{h}{2\pi}\right) \neq (0,0,0),$$

l'hélice est une courbe régulière.

Plan $0xy$:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$$



Axe z :

$$z(t) = \frac{h}{2\pi}\, t$$