2.4. Courbes paramétrées dans $\mathbb{R}^2$

Définition. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle.

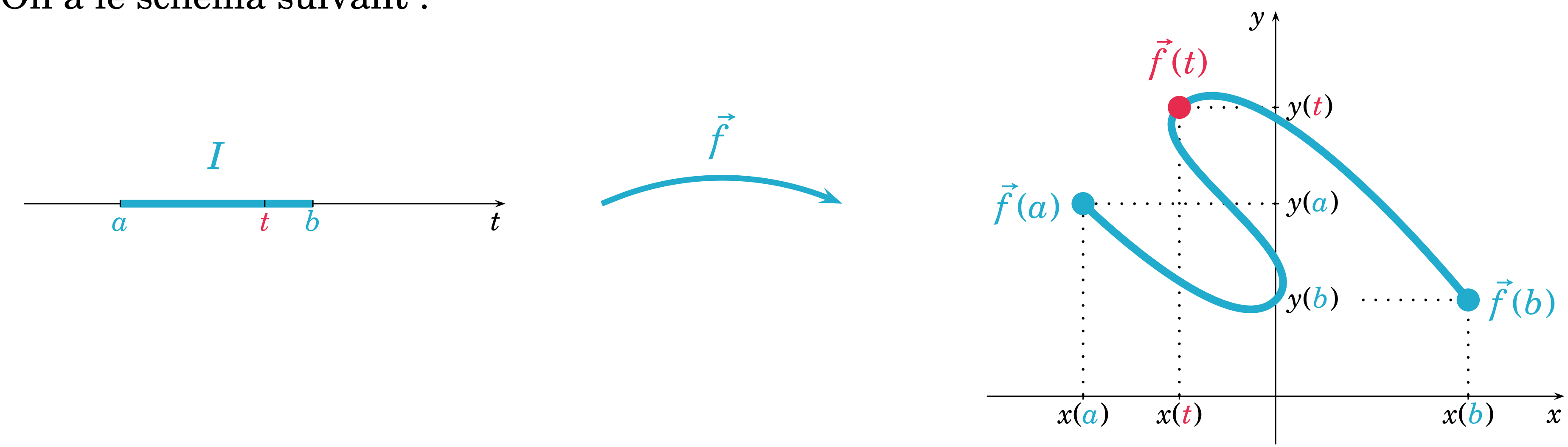
Soient $x : I \to \mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues d'une variable réelle.

On définit la fonction

$$\begin{aligned} \vec{f} : I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \big(x(t), y(t)\big) \end{aligned}$$

appelée *courbe paramétrée*.

On a le schéma suivant :



L'image de $\vec{f}$ est appelée *trace* de la courbe paramétrée.

La variable t est appelée *paramètre*.

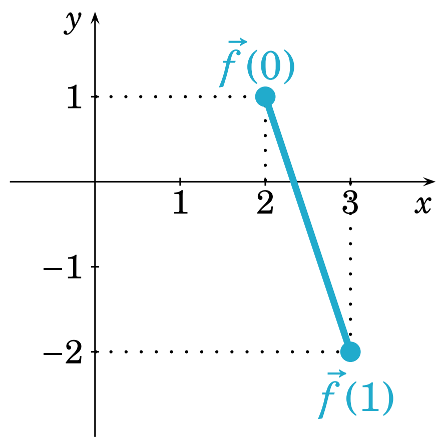
Remarques.

- La paramétrisation d'une courbe paramétrée n'est pas unique.
- Si $I = [a, b]$, alors le point $\vec{f}(a)$ est appelé le *point de départ* et le point $\vec{f}(b)$ est appelé le *point d'arrivée*.
- Si l'on prend l'intervalle $I = [0, 1]$, on parle plutôt de *chemin*.
- On peut voir $\vec{f}(t)$ comme la position au temps t du crayon servant à dessiner la courbe.

Exemples

1. $\vec{f}:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\quad t \longmapsto (2+t, 1-3t)$



Nous avons

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+t \\ 1-3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \text{avec } t \in [0,1]$$

Equation du segment de droite qui relie le point $(2,1)$ au point $(3,-2)$

2. De manière générale,

$$\vec{f}(t) = (x_0 + at\,,\; y_0 + bt), \qquad \text{avec } t \in [0,1]$$

est le segment qui relie les points (x_0, y_0) et $(x_0 + a, y_0 + b)$.

3. $\vec{f}(t) = \big(\cos(t),\ \sin(t)\big)$, avec $t \in [0, 2\pi]$

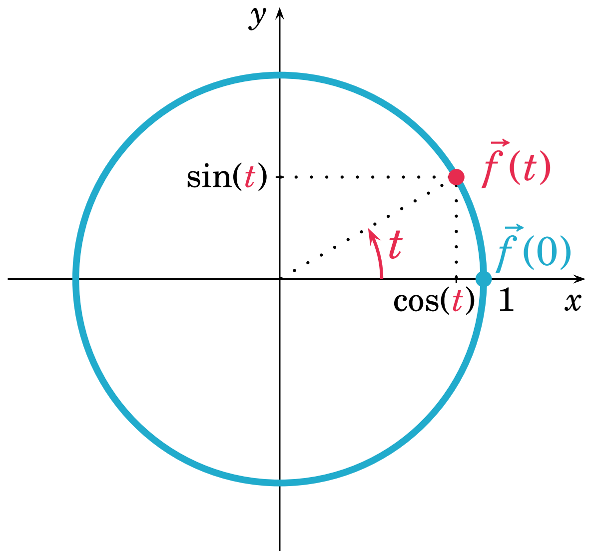
est le cercle de rayon 1 centré à l'origine

$t = 0\ :\ \vec{f}(0) = (1, 0)$

$t = \dfrac{\pi}{2}\ :\ \vec{f}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = (0, 1)$

$t = \pi\ :\ \vec{f}(\pi) = (-1, 0)$

$t = \dfrac{3\pi}{2}\ :\ \vec{f}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = (0, -1)$



4. $\vec{f}(t) = \big(R\cos(t),\ R\sin(t)\big)$, avec $t \in [0, 2\pi]$

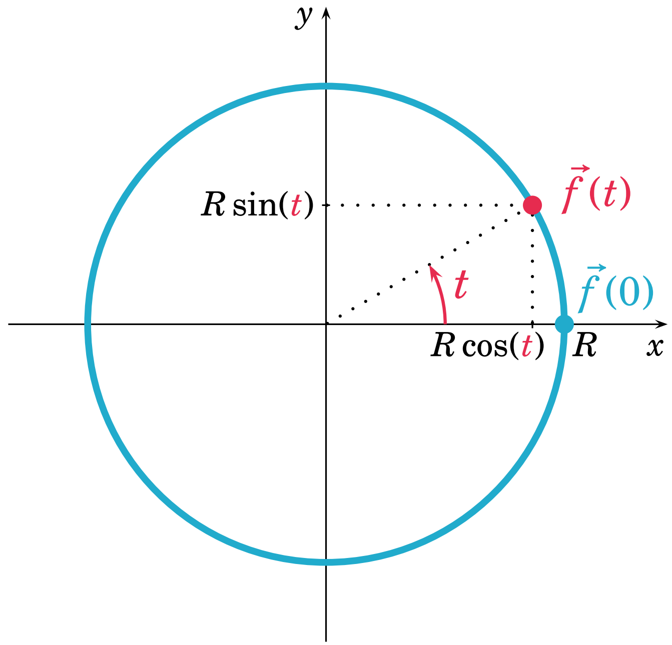
est le cercle de rayon R centré à l'origine

$t = 0\ :\ \vec{f}(0) = (R, 0)$

$t = \dfrac{\pi}{2}\ :\ \vec{f}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = (0, R)$

$t = \pi\ :\ \vec{f}(\pi) = (-R, 0)$

$t = \dfrac{3\pi}{2}\ :\ \vec{f}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = (0, -R)$



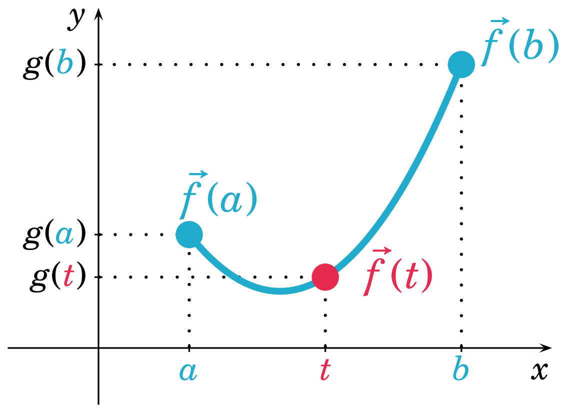
5. $\vec{f}(t) = \big(x_0 + R\cos(t),\ y_0 + R\sin(t)\big)$, avec $t \in [0, 2\pi]$

est le cercle de rayon R centré en (x_0, y_0)

6. Si $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ est une fonction continue, alors

$$\vec{f}(t)=\big(t,\ g(t)\big),\qquad \text{avec } t\in[a,b]$$

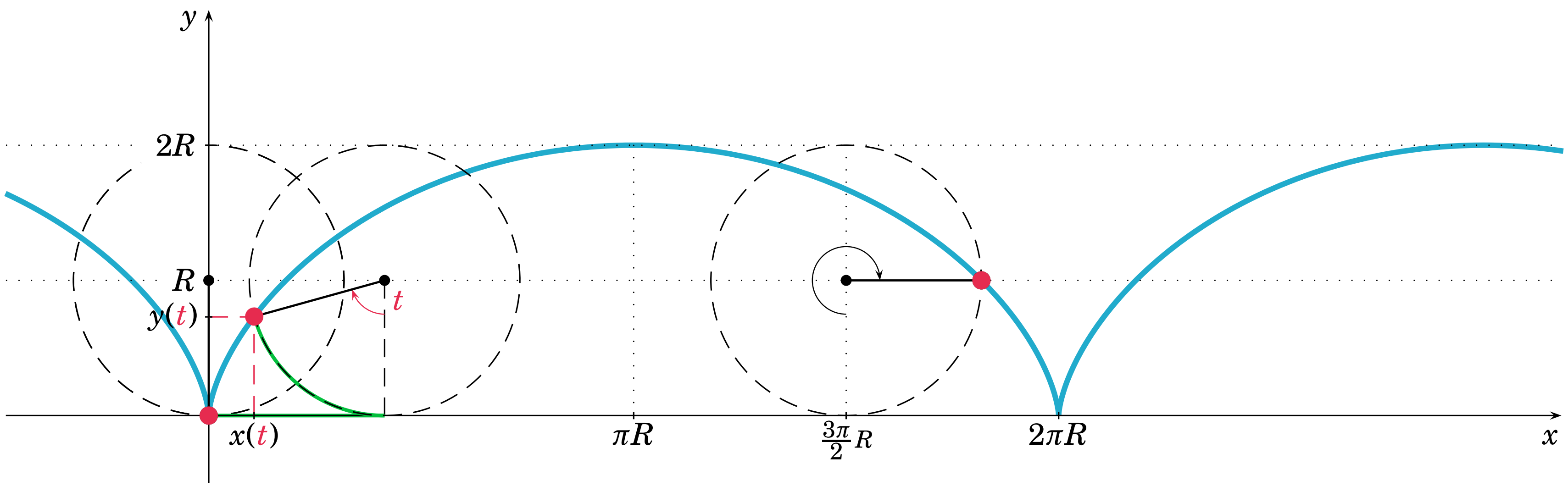
est une paramétrisation du graphe de g.



7. Cycloïde (trajectoire de la valve d'une roue de vélo, Mersenne et Galilée, 1599)

Paramétrisation :

$$\vec{f}(t)=\big(x(t),y(t)\big)\quad\text{où}\quad\begin{cases}x(t)=R\big(t-\sin(t)\big),\\ y(t)=R\big(1-\cos(t)\big),\end{cases}\qquad\text{avec } t\in\mathbb{R}$$



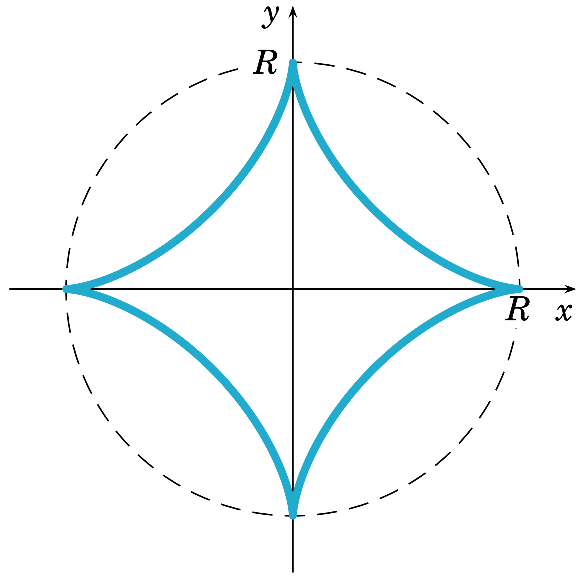
8. Astroïde (Rømer, 1674)

Equation implicite : $x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}$

autrement dit, $\left(\underbrace{\left(\frac{x}{R}\right)^{1/3}}_{=\cos(t)} \right)^2 + \left(\underbrace{\left(\frac{y}{R}\right)^{1/3}}_{=\sin(t)} \right)^2 = 1$

Paramétrisation :

$$\begin{cases} x(t) = R\cos^3(t), \\ y(t) = R\sin^3(t), \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$



9. Cardioïde (Rømer, 1674)

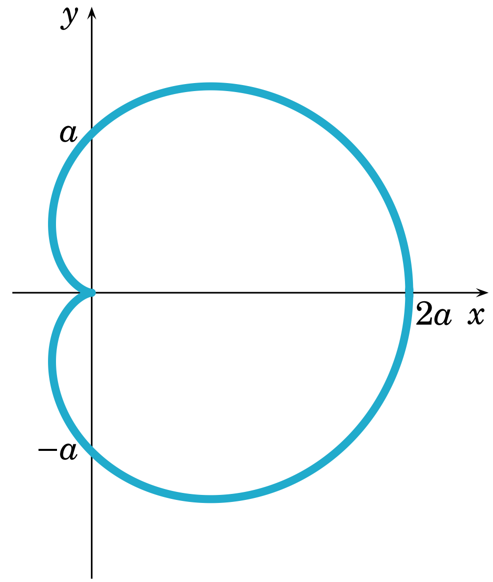
Equation implicite : $(x^2+y^2)^2 - 2ax(x^2+y^2) = a^2y^2$, avec $a > 0$

Paramétrisation :

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(t)\big(1+\cos(t)\big), \\ y(t) = a\sin(t)\big(1+\cos(t)\big), \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

Deuxième paramétrisation

$$\begin{cases} x(u) = \dfrac{2a(1-u^2)}{(1+u^2)^2}, \\[2mm] y(u) = \dfrac{4au}{(1+u^2)^2}, \end{cases} \qquad \text{avec } u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$$



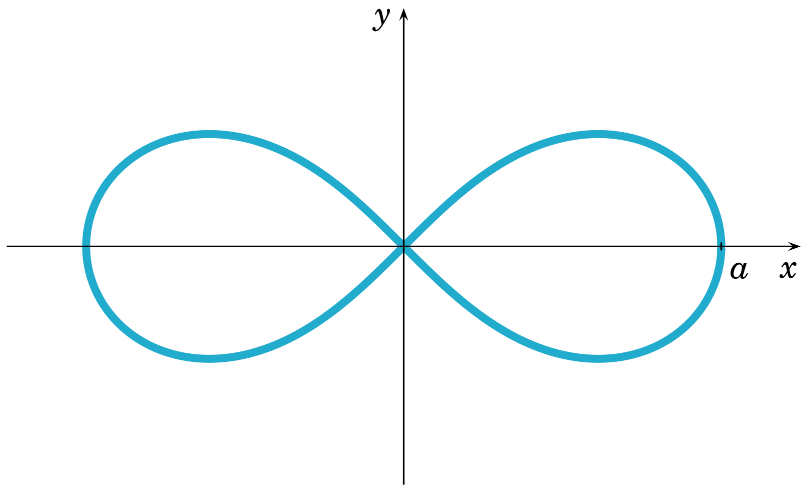
10. Lemniscate de Bernoulli (Jakob Bernoulli, 1694)

Equation implicite :

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0\,,\qquad \text{avec } a>0$$

Paramétrisation :

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{a\cos(t)}{1+\sin^2(t)}\,, \\[2ex] y(t)=\dfrac{a\sin(t)\cos(t)}{1+\sin^2(t)}\,, \end{cases} \qquad \text{avec } t\in\mathbb{R}$$



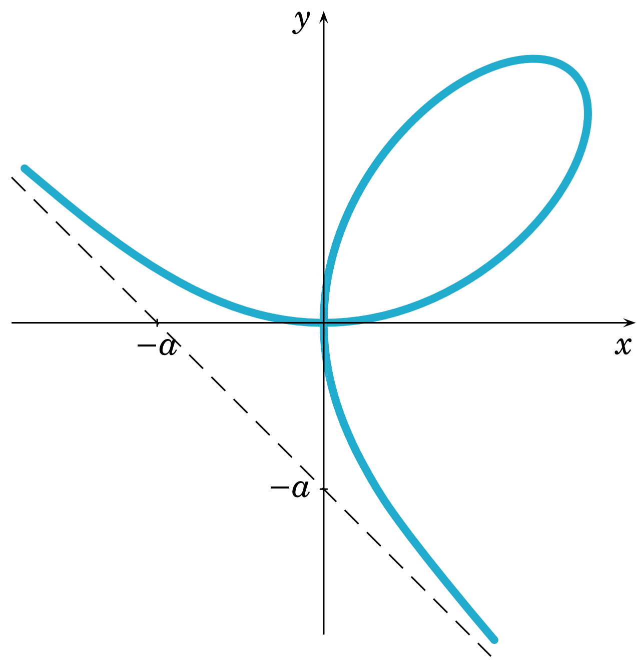
11. Feuille (folium) de Descartes (1638)

Equation implicite :

$$x^3+y^3=3axy\,,\qquad \text{avec } a>0$$

Paramétrisation :

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{3at}{1+t^3}\,, \\[2ex] y(t)=\dfrac{3at^2}{1+t^3}\,, \end{cases} \qquad \text{avec } t\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$$

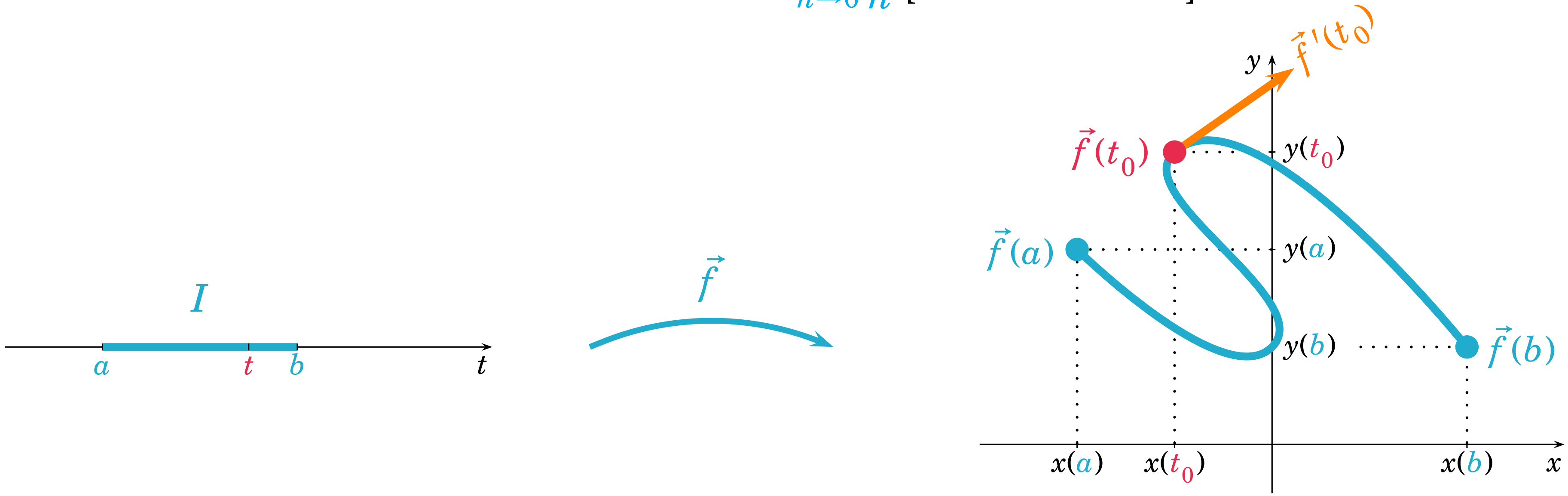


Définition. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $\vec{f} : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée

$$\vec{f}(t) = \big(x(t), y(t)\big) \qquad \text{avec } t \in I.$$

On dit que la courbe paramétrée $\vec{f}$ est *dérivable en $t_0 \in I$* si les fonctions $x : I \to \mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{R}$ sont dérivables en $t_0 \in I$. Dans ce cas, le vecteur $\big(x'(t_0),\ y'(t_0)\big)$ est appelé le *vecteur tangent* à la courbe paramétrée au point $\vec{f}(t_0)$, noté $\vec{f}\,'(t_0)$. Nous avons :

$$\vec{f}\,'(t_0) = \big(x'(t_0),\ y'(t_0)\big) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\vec{f}(t_0 + h) - \vec{f}(t_0)\right]$$



Le vecteur tangent $\vec{f}\,'(t)$ indique la direction et le sens de parcours de la courbe au temps t. Sa norme nous donne la vitesse de parcours.

On dit que la courbe paramétrée $\vec{f}$ est *dérivable* si elle est dérivable en tout $t_0 \in I$.

Exemple

Considérons la paramétrisation

$$\vec{f}(t) = \big(\cos(t),\ \sin(t)\big), \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

Nous avons

$$\vec{f}\,'(t) = \big(-\sin(t),\ \cos(t)\big)$$

Quelques cas particuliers :

$t = 0\ :\ \vec{f}\,'(0) = (0, 1)$

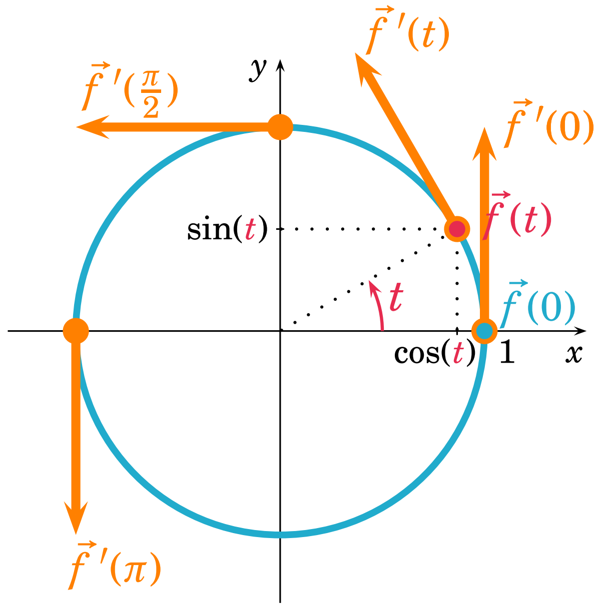
$t = \frac{\pi}{2}\ :\ \vec{f}\,'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1, 0)$

$t = \pi\ :\ \vec{f}\,'(\pi) = (0, -1)$

De plus, comme

$$\|\vec{f}\,'(t)\| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1,$$

la vitesse de parcours est constante.



Définition. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $\vec{f} : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée

$$\vec{f}(t) = \big(x(t), y(t)\big) \qquad \text{avec } t \in I.$$

Soit $k \geqslant 1$ un entier. Si les dérivées $x^{(m)}$ et $y^{(m)}$ existent et sont continues sur I pour tout $1 \leqslant m \leqslant k$, alors on dit que la courbe paramétrée $\vec{f}$ est *de classe C^k*.
Si $\vec{f}$ est de classe C^k pour tout $k \geqslant 1$, alors on dit que $\vec{f}$ est *de classe C^∞*.

Définition. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $\vec{f} : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée de classe C^1

$$\vec{f}(t) = \big(x(t), y(t)\big) \qquad \text{avec } t \in I.$$

On dit que la courbe paramétrée $\vec{f}$ est *singulière en $t_0 \in I$* si $\vec{f}\,'(t_0) = \vec{0}$. Le point $\vec{f}(t_0)$ est appelé *point singulier de $\vec{f}$*.
On dit que la courbe paramétrée $\vec{f}$ est *régulière en $t_0 \in I$* si $\vec{f}\,'(t_0) \neq \vec{0}$.
On dit que la courbe paramétrée $\vec{f}$ est *régulière* si $\vec{f}\,'(t) \neq \vec{0}$ pour tout $t \in I$.

Exemples

1. Le cercle paramétré par
$$\vec{f}(t) = \big(x_0 + R\cos(t),\ y_0 + R\sin(t)\big), \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R},$$
est tel que $\vec{f}\,'(t) = \big(-R\sin(t),\ R\cos(t)\big)$.
Par conséquent, il s'agit d'une courbe régulière.
2. Le graphe de la fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ paramétré par
$$\vec{f}(t) = \big(t,\ g(t)\big), \qquad \text{avec } t \in [a,b],$$
est tel que $\vec{f}\,'(t) = \big(1, g'(t)\big) \neq (0,0)$.
Par conséquent, il s'agit d'une courbe régulière si g' est une fonction continue.
3. La cycloïde paramétrée par
$$\vec{f}(t) = \big(R(t - \sin t),\ R(1 - \cos t)\big), \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R},$$
est telle que $\vec{f}\,'(t) = \big(R(1 - \cos t),\ R\sin t\big)$.
Par conséquent, la cycloïde *n'est pas* une courbe régulière car les points
$$\vec{f}(2\pi k) = (2\pi k R, 0), \qquad \text{avec } k \in \mathbb{Z},$$
sont des points singuliers de $\vec{f}$.

2.5. Longueur d'une courbe

Définition. Soit $\vec{f}:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée de classe C^1 :

$$\vec{f}(t)=\big(x(t),y(t)\big),\qquad \text{avec } t\in[a,b].$$

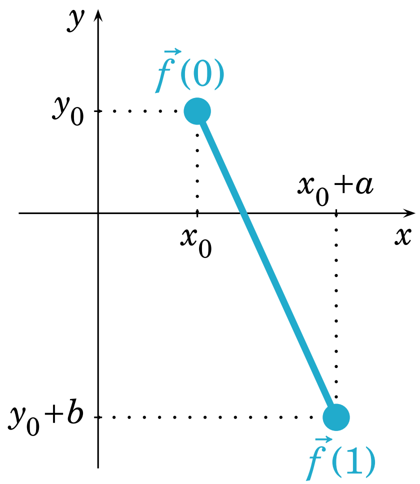
Nous appelons *longueur de la courbe* $\vec{f}$ le nombre

$$\mathcal{L}=\int_a^b \|\vec{f}\,'(t)\|\,dt,$$

où $\|\vec{f}\,'(t)\|=\sqrt{\big(x'(t)\big)^2+\big(y'(t)\big)^2}$.

Exemples

1. *Longueur d'un segment de droite*



Nous savons par la géométrie que la longueur du segment qui relie les points (x_0, y_0) et $(x_0 + a, y_0 + b)$ est égale à

$$\mathcal{L} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Nous pouvons retrouver le même résultat à l'aide de la formule

$$\mathcal{L} = \int_a^b \|\vec f\,'(t)\|\, dt.$$

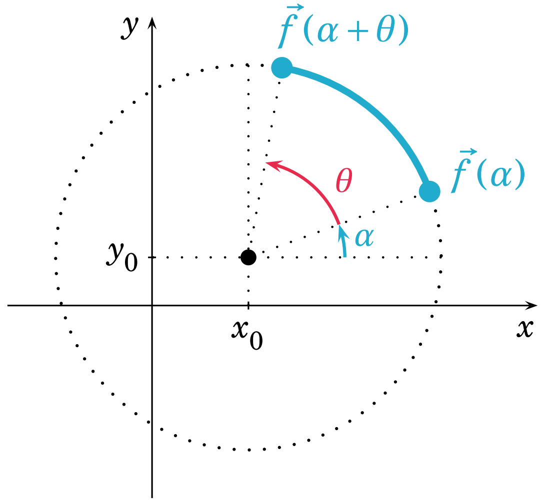
En effet, soit

$$\vec f(t) = (x_0 + at,\ y_0 + bt), \qquad \text{avec } t \in [0,1]$$

la paramétrisation du segment qui relie les points (x_0, y_0) et $(x_0 + a, y_0 + b)$. Comme le vecteur tangent est le vecteur constant $\vec f\,'(t) = (a, b)$, la longueur du segment est

$$\mathcal{L} = \int_0^1 \|\vec f\,'(t)\|\, dt = \int_0^1 \sqrt{a^2 + b^2}\, dt = \sqrt{a^2 + b^2} \Big[\, t \,\Big]_0^1 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

2. *Longueur d'un arc de cercle*



Nous savons par la géométrie que la longueur d'un arc de cercle de rayon R et angle θ est égale à

$$\mathcal{L} = R\theta\,.$$

Nous pouvons retrouver le même résultat à l'aide de la formule

$$\mathcal{L} = \int_a^b \|\vec{f}\,'(t)\|\,dt\,.$$

En effet, soit

$$\vec{f}(t) = \big(x_0 + R\cos(t),\ y_0 + R\sin(t)\big), \qquad \text{avec } t \in [\alpha, \alpha+\theta],$$

la paramétrisation d'un arc de cercle de rayon R. Comme $\vec{f}\,'(t) = \big(-R\sin(t),\ R\cos(t)\big)$ et

$$\|\vec{f}\,'(t)\| = \sqrt{\big(-R\sin(t)\big)^2 + \big(R\cos(t)\big)^2} = R\,,$$

la longueur de l'arc de cercle est :

$$\mathcal{L} = \int_\alpha^{\alpha+\theta} \|\vec{f}\,'(t)\|\,dt = \int_\alpha^{\alpha+\theta} R\,dt = R\Big[t\Big]_\alpha^{\alpha+\theta} = R\theta\,.$$

Si $\theta = 2\pi$ nous retrouvons $\mathcal{L} = 2\pi\rho$ (périmètre du cercle)

3. *Longueur du graphe d'une fonction*

Nous avons vu que si $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors

$$\vec{f}(t) = \big(t\,,\, g(t)\big), \qquad \text{avec } t \in [a, b]$$

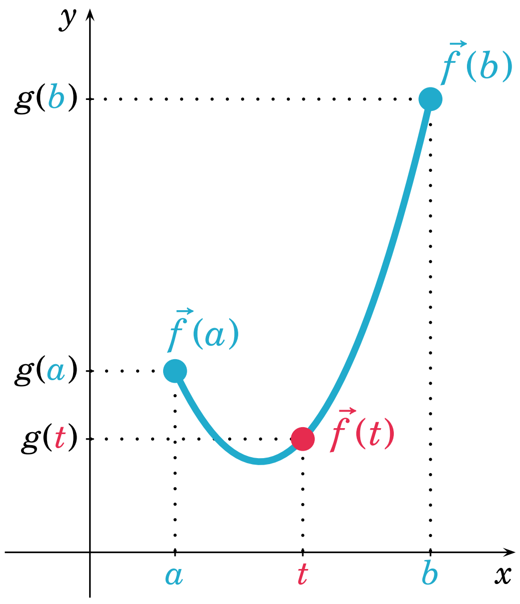
est une paramétrisation du graphe de g.

Comme le vecteur tangent est $\vec{f}\,'(t) = \big(1\,,\, g'(t)\big)$, nous avons

$$\big\|\vec{f}\,'(t)\big\|^2 = 1 + \big(g'(t)\big)^2 .$$

Ainsi, si g' est une fonction continue, la longueur cherchée est

$$\mathcal{L} = \int_a^b \sqrt{1 + \big(g'(t)\big)^2}\, dt .$$



2.6. Courbes paramétrées dans $\mathbb{R}^n$

La notion de courbe paramétrée se généralise naturellement lorsqu'on passe de $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{R}^n$:

Définition. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé. Soient $x_1 : I \to \mathbb{R}, \dots, x_n : I \to \mathbb{R}$ n fonctions continues d'une variable. On définit la fonction

$$\begin{aligned} \vec{f} : I &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big) \end{aligned}$$

appelée *courbe paramétrée*.

L'image de $\vec{f}$ est appelée *trace* de la courbe paramétrée.

La variable t est appelée *paramètre*.

On dit que la courbe paramétrée $\vec{f}$ est *dérivable en* $t_0 \in I$ si $x_1 : I \to \mathbb{R}, \dots, x_n : I \to \mathbb{R}$ sont dérivables en $t_0 \in I$. Dans ce cas, le vecteur $\big(x_1'(t_0), \dots, x_n'(t_0)\big)$ est appelé le *vecteur tangent* à la courbe paramétrée au point $\vec{f}(t_0)$, noté $\vec{f}\,'(t_0)$. Nous avons :

$$\vec{f}\,'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\vec{f}(t_0 + h) - \vec{f}(t_0)\right].$$

Si la courbe paramétrée $\vec{f}$ est de classe C^1, la *longueur de la courbe* $\vec{f}$ est le nombre

$$\mathcal{L} = \int_a^b \left\|\vec{f}\,'(t)\right\| dt.$$

Exemple

Hélice circulaire dans l'espace

Paramétrisation :

$$\vec{f}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$$

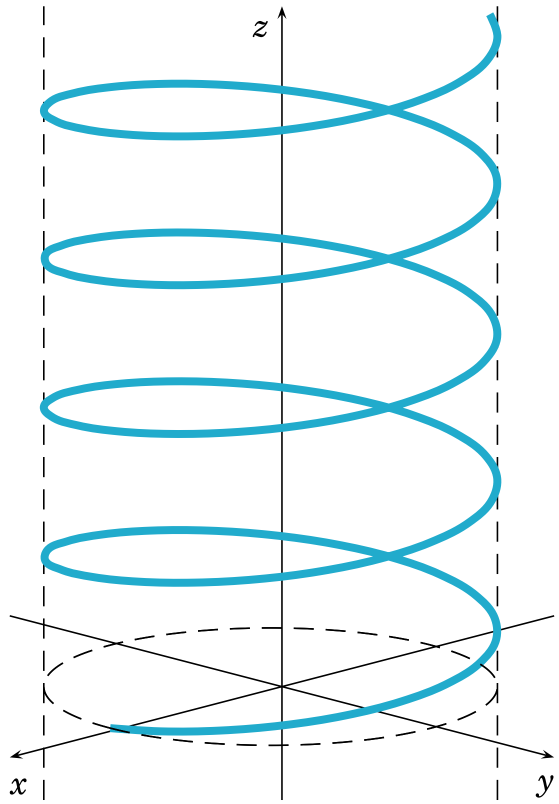
où

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t), \\ y(t) = \sin(t), \\ z(t) = \dfrac{h}{2\pi}\, t \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

Comme nous avons

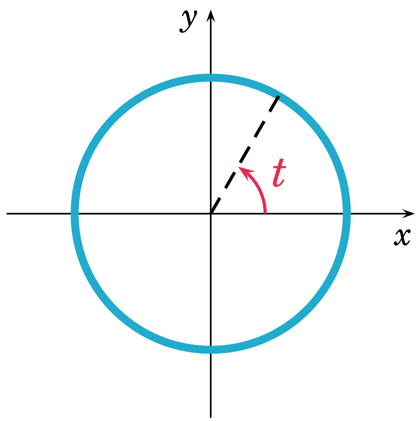
$$\vec{f}\,'(t) = \left(-\sin(t),\ \cos(t),\ \frac{h}{2\pi}\right) \neq (0,0,0),$$

l'hélice est une courbe régulière.



Plan $0xy$:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$$



Axe z :

$$z(t) = \frac{h}{2\pi}\, t$$