

2.4. Suites dans $\mathbb{R}^n$.

Rappels. (Analyse I)

Définition. Une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ est une application

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ k \mapsto f(k) = x_k$$

Notation: $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ou $(x_k)_{k \geq 0}$ ou (x_k)

Exemples.

$\left(\frac{1}{k+1}\right)_{k \in \mathbb{N}}$, $(k^2)_{k \in \mathbb{N}}$, $\left(\frac{1}{k!}\right)_{k \in \mathbb{N}}$, etc.

Définition. Soit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

On dit que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers a , noté

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$$

si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $N \in \mathbb{N}$ (qui dépend de ε) tel que $|x_k - a| < \varepsilon$ pour tout $k \geq N$

Autrement dit, si x_k est suffisamment proche de a dès que k est assez grand : à partir d'un certain k , tous les x_k se trouvent dans l'intervalle ouvert $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$.

Définition. Une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}$ est **bornée** s'il existe un nombre $c > 0$ tel que $|x_k| \leq c$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Autrement dit, si **tous** les x_k se trouvent dans l'intervalle fermé $[-c, c]$.

Définition. Une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}$ est une **suite de Cauchy** si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $N \in \mathbb{N}$ (qui dépend de ε) tel que $|x_k - x_j| < \varepsilon$ pour tout $j, k \geq N$.

Définition. Soit $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante.
 $j \mapsto f(j)$

La suite d'éléments de $\mathbb{R}$ définie par $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
 $j \mapsto x_{f(j)}$
est une **sous-suite** de $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Suites dans $\mathbb{R}^n$.

Définition. Une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est une application

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ k \mapsto f(k) = \vec{x}_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,n})$$

Notation: $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ou $(\vec{x}_k)_{k \geq 0}$ ou $(\vec{x}_k)$

Exemples.

$$\left(\frac{1}{k+1}, k^2, \frac{1}{k!} \right)_{k \in \mathbb{N}}, \text{ etc.}$$

Définition. Soit $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$ et $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$.

On dit que la suite $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\vec{a}$, noté

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{a}$$

si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $N \in \mathbb{N}$ (qui dépend de ε) tel que $\|\vec{x}_k - \vec{a}\| < \varepsilon$ pour tout $k \geq N$

Autrement dit, si $\vec{x}_k$ est suffisamment proche de $\vec{a}$ dès que k est assez grand : à partir d'un certain k , tous les $\vec{x}_k$ se trouvent dans la boule ouverte $B(\vec{a}, \varepsilon)$.

Définition. Une suite $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est **bornée** s'il existe un nombre $c > 0$ tel que $\|\vec{x}_k\| \leq c$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Autrement dit, si **tous** les $\vec{x}_k$ se trouvent dans la boule fermée $\overline{B(\vec{0}, c)}$.

Définition. Une suite $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est une **suite de Cauchy** si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $N \in \mathbb{N}$ (qui dépend de ε) tel que $\|\vec{x}_k - \vec{x}_j\| < \varepsilon$ pour tout $j, k \geq N$.

Définition. Soit $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante.
 $j \mapsto f(j)$

La suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$ définie par $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$
 $j \mapsto \vec{x}_{f(j)}$
est une **sous-suite** de $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Propriétés des suites d'éléments de $\mathbb{R}^n$.

Proposition. Soit $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$ et soit $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$.

Soient $(x_{k,1})_{k \in \mathbb{N}}$, $(x_{k,2})_{k \in \mathbb{N}}$, ..., $(x_{k,n})_{k \in \mathbb{N}}$ les n suites numériques formées avec les composantes de $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Nous avons:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{a} \iff \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k,j} = a_j \text{ pour tout } j \in \{1, \dots, n\}$$

Preuve.

$\Rightarrow$) Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $N \in \mathbb{N}$ (qui dépend de ε) tel que $\|\vec{x}_k - \vec{a}\| < \varepsilon$ pour tout $k \geq N$

A voir: $|x_{k,j} - a_j| < \varepsilon$ pour tout $k \geq N$ et $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} \text{On a: } |x_{k,j} - a_j| &\leq \max_{j \in \{1, \dots, n\}} |x_{k,j} - a_j| = \|\vec{x}_k - \vec{a}\|_{\infty} \\ &\leq \|\vec{x}_k - \vec{a}\| < \varepsilon \text{ pour tout } k \geq N \end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $N_j \in \mathbb{N}$ (qui dépend de ε) tel que $|x_{k,j} - a_j| < \varepsilon$ pour tout $k \geq N_j$

et $j \in \{1, \dots, n\}$. A voir: $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{a}$

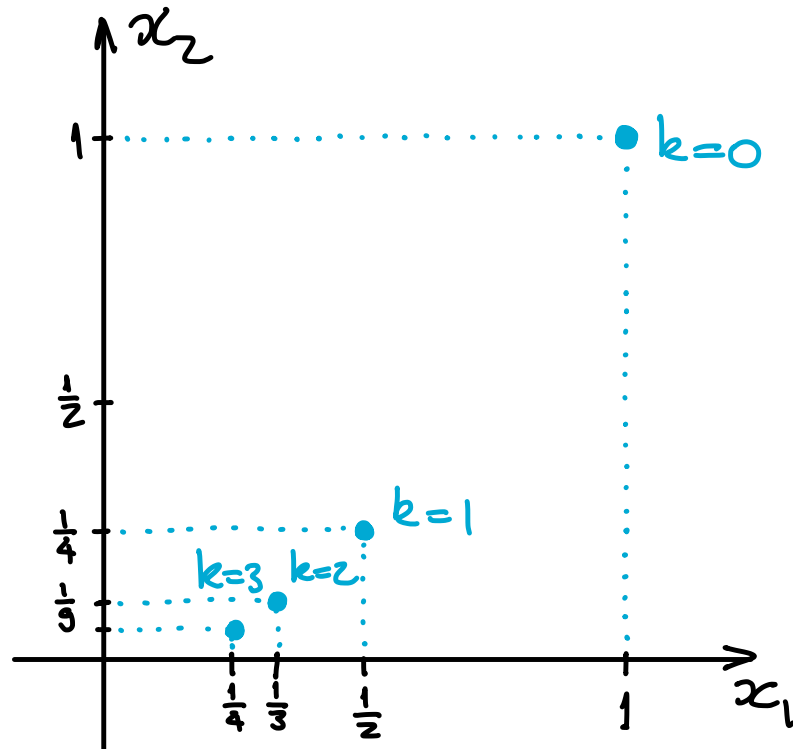
$$\begin{aligned} \text{On a: } \|\vec{x}_k - \vec{a}\| &\leq \|\vec{x}_k - \vec{a}\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_{k,j} - a_j| \\ &< n\varepsilon \text{ pour tout } k \geq \max_j N_j \end{aligned}$$



Exemple.

Nous avons vu que $\left(\frac{1}{k+1}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{(k+1)^2}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ sont des suites numériques convergentes vers 0.

Par conséquent, la suite $\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{(k+1)^2}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $(0,0)$.



Proposition. Soit $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$.

Soient $(x_{k,1})_{k \in \mathbb{N}}$, $(x_{k,2})_{k \in \mathbb{N}}$, ..., $(x_{k,n})_{k \in \mathbb{N}}$ les n suites numériques formées avec les composantes de $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Nous avons:

$$\left. \begin{array}{l} (\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ est une} \\ \text{suite de Cauchy} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x_{k,j})_{k \in \mathbb{N}} \text{ est une suite de} \\ \text{Cauchy pour tout } j \in \{1, \dots, n\} \end{array} \right.$$

Théorème.

Si $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente d'éléments de $\mathbb{R}^n$, alors $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée.

Preuve.

Supposons que $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$.

Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|\vec{x}_k - \vec{a}\| < 1$ pour tout $k \geq N$.

L'inégalité triangulaire implique

$$\|\vec{x}_k\| = \|(\vec{x}_k - \vec{a}) + \vec{a}\| \leq \|\vec{x}_k - \vec{a}\| + \|\vec{a}\| < 1 + \|\vec{a}\|$$

pour tout $k \geq N$. Par conséquent,

$$\|\vec{x}_k\| \leq \max(\|\vec{x}_0\|, \|\vec{x}_1\|, \dots, \|\vec{x}_{N-1}\|, 1 + \|\vec{a}\|) = M$$



Conséquence importante.

Si $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ n'est pas une suite bornée d'éléments de $\mathbb{R}^n$,
alors $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ n'est pas une suite convergente.

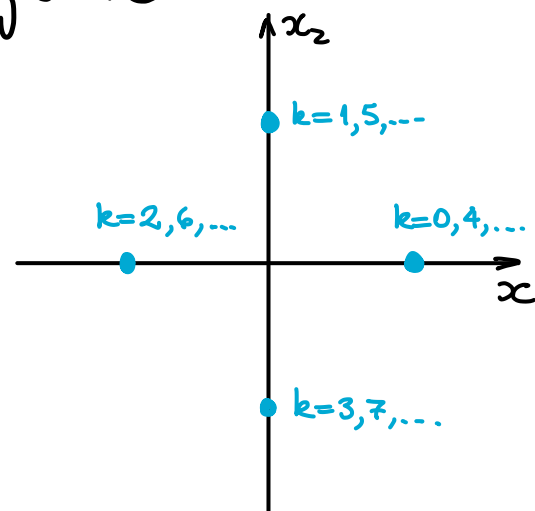
Attention.

Si $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée d'éléments de $\mathbb{R}^n$,
alors on ne peut rien conclure au sujet de la convergence:

La suite $\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{(k+1)^2}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée et convergente.

Par contre, la suite $\left(\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right)_{k \in \mathbb{N}}$

est bornée mais pas convergente:



Théorème de Bolzano-Weierstrass.

Soit $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite bornée d'éléments de $\mathbb{R}^n$.

Alors il est possible d'extraire une sous-suite convergente.

Rappel.

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$.

- E est un ensemble ouvert si pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un nombre $\delta > 0$ (qui dépend de $\vec{x}$) tel que $B(\vec{x}, \delta) \subset E$.
- E est un ensemble fermé si $E^c = \mathbb{R}^n \setminus E$ est ouvert.

Nous allons donner maintenant une caractérisation d'ensemble fermé à l'aide des suites:

Théorème. Soit E un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}^n$

Nous avons l'équivalence :

$$E \text{ est fermé} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{toute suite d'éléments de } E \text{ qui est convergente} \\ \text{converge vers un élément de } E. \end{cases}$$

Preuve.

$\Rightarrow$) Supposons que E est fermé.

Soit $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite convergente vers $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$,

telle que $\vec{x}_k \in E$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

A voir : $\vec{a} \in E$.

Supposons par l'absurde que $\vec{a} \notin E$, c'est-à-dire $\vec{a} \in E^c$.

Comme par hypothèse E est fermé, l'ensemble E^c est ouvert.

Par conséquent, il existe $\delta > 0$ tel que $B(\vec{a}, \delta) \subset E^c$.

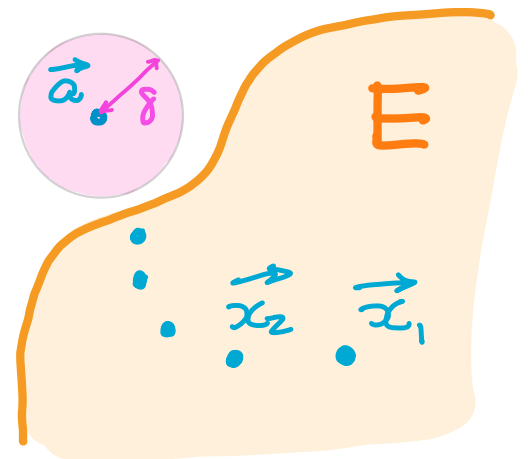
Comme $\vec{x}_k \in E$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\{\vec{x}_k : k \in \mathbb{N}\} \cap B(\vec{a}, \delta) = \emptyset,$$

en contradiction avec le fait que

$(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\vec{a} \in E^c$.

Par conséquent, $\vec{a} \in E$.



$\Leftarrow$) Supposons maintenant que toute suite convergente $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ avec $\vec{x}_k \in E$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ converge vers un élément de E .

A voir: E est fermé.

Supposons par l'absurde que E n'est pas fermé.

Par conséquent, $E^c = \mathbb{R}^n \setminus E$ n'est pas ouvert.

Il existe donc $\vec{a} \in E^c$ tel que

$$B(\vec{a}, \delta) \not\subset E^c \text{ pour tout } \delta > 0.$$

Autrement dit, $B(\vec{a}, \delta) \cap E \neq \emptyset$ pour tout $\delta > 0$.

En particulier, $B(\vec{a}, \frac{1}{k+1}) \cap E \neq \emptyset$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On peut donc choisir $\vec{x}_k \in B(\vec{a}, \frac{1}{k+1}) \cap E$ pour chaque $k \in \mathbb{N}$.

Par construction, la suite $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E

converge vers $\vec{a} \notin E$, en contradiction avec l'hypothèse. ■

Conséquence.

Pour obtenir l'adhérence $\overline{E}$ d'un ensemble E (c'est-à-dire le plus petit fermé qui contient E), il suffit de rajouter à E tous les $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ qui sont limites de suites convergentes d'éléments de E .

Exemple.

Soit $E = [0, 1[$.

Comme $x_k = \frac{k}{k+1} \in E$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 1$
nous avons $\overline{E} = [0, 1]$.