

Proposition. La boule ouverte de centre $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ et rayon $r > 0$:

$$B(\vec{a}, r) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{a}\| < r \}$$

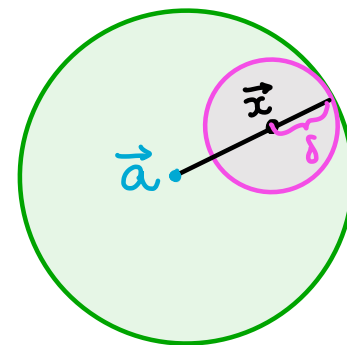
est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Preuve. Soit $\vec{x} \in B(\vec{a}, r)$. Nous avons

$$\|\vec{x} - \vec{a}\| < r \iff 0 < r - \|\vec{x} - \vec{a}\|$$

Ainsi, en posant $\delta = r - \|\vec{x} - \vec{a}\| > 0$ nous trouvons

$$B(\vec{x}, \delta) \subset B(\vec{a}, r)$$



En effet, si $\vec{y} \in B(\vec{x}, \delta)$, alors $\|\vec{y} - \vec{x}\| < \delta$ et

$$\|\vec{y} - \vec{a}\| = \|(\vec{y} - \vec{x}) + (\vec{x} - \vec{a})\| \stackrel{(\tau)}{\leq} \|\vec{y} - \vec{x}\| + \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta + \|\vec{x} - \vec{a}\|$$

$$\Rightarrow \|\vec{y} - \vec{a}\| < r \Rightarrow \vec{y} \in B(\vec{a}, r)$$



Proposition. Soit $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ et $r \geq 0$. L'ensemble

$$E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{a}\| > r\}$$

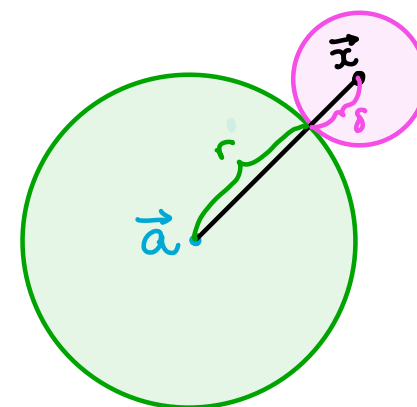
est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Preuve. Soit $\vec{x} \in E$. Nous avons

$$\|\vec{x} - \vec{a}\| > r \iff 0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| - r$$

Ainsi, en posant $\delta = \|\vec{x} - \vec{a}\| - r > 0$ nous trouvons

$$B(\vec{x}, \delta) \subset E$$



En effet, si $\vec{y} \in B(\vec{x}, \delta)$, alors $\|\vec{y} - \vec{x}\| < \delta = \|\vec{x} - \vec{a}\| - r$

$$\text{d'où : } r < \|\vec{x} - \vec{a}\| - \|\vec{y} - \vec{x}\| \leq |\|\vec{x} - \vec{a}\| - \|\vec{x} - \vec{y}\|| \stackrel{(\text{TI})}{\leq} \|\vec{y} - \vec{a}\|$$

$$\Rightarrow \|\vec{y} - \vec{a}\| > r \Rightarrow \vec{y} \in E$$

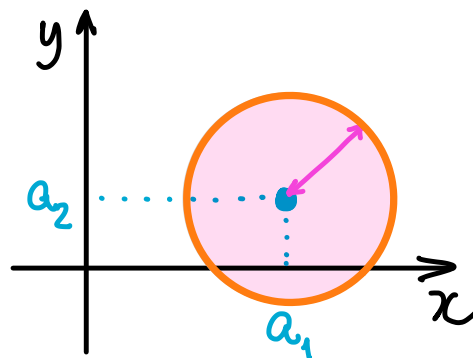


Définition.

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que E est **fermé** si le sous-ensemble complémentaire $E^c = \mathbb{R}^n \setminus E$ est ouvert.

Exemples.

1. $E =]-\infty, 0] \subset \mathbb{R}$ est fermé car $E^c =]0, \infty[$ est ouvert
2. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 \leq r^2\} \subset \mathbb{R}^2$ est fermé car $E^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 > r^2\}$ est ouvert.



Remarques.

- L'ensemble vide $E = \emptyset$ est fermé car nous avons montré que $E^c = \mathbb{R}^n \setminus \emptyset = \mathbb{R}^n$ est ouvert.
- L'ensemble $E = \mathbb{R}^n$ est fermé car nous avons postulé que l'ensemble vide $E^c = \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n = \emptyset$ est ouvert.
- L'ensemble vide $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ sont les seuls sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ qui sont à la fois ouverts et fermés.

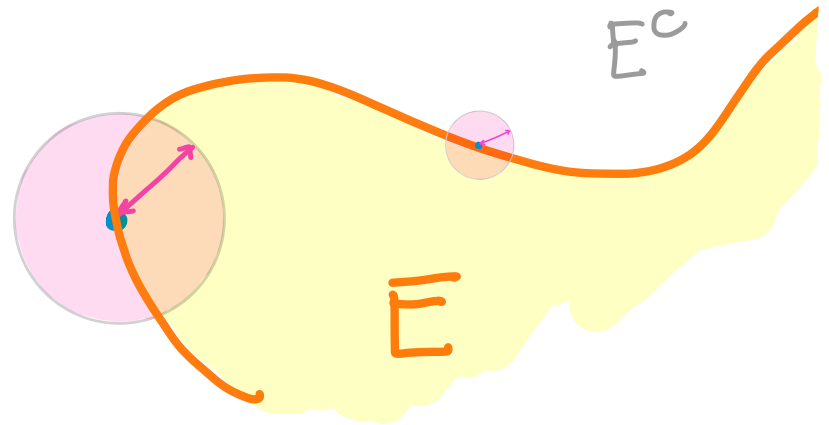
Définition.

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$.

On dit que $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ est un point frontière de E si pour tout nombre $r > 0$ nous avons

$$B(\vec{x}, r) \cap E \neq \emptyset$$

$$\text{et } B(\vec{x}, r) \cap E^c \neq \emptyset$$



L'ensemble de tous les points frontière de E est appelé

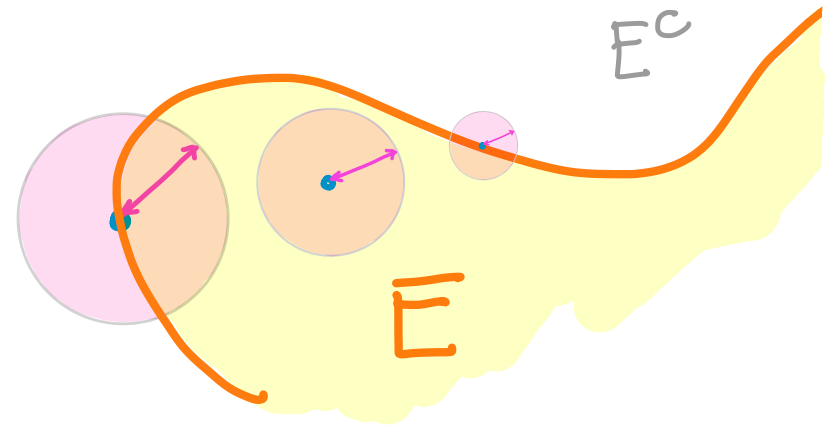
le bord (ou frontière) de E , noté ∂E [∂ : lettre "d" arrondie]

Définition.

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$.

On dit que $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ est un point adhérent à E si pour tout nombre $r > 0$ nous avons

$$B(\vec{x}, r) \cap E \neq \emptyset$$



L'ensemble de tous les points adhérents à E est appelé l'adhérence de E , noté $\overline{E}$.

Par construction, $E \subset \overline{E}$ et $\partial E \subset \overline{E}$.

Exemples.

1. Soit $E =]0, 1] \subset \mathbb{R}$



- $0 \notin E$ est un point adhérent à E car

$$]-r, r[\cap E =]0, r[\neq \emptyset \text{ si } 0 < r \leq 1$$

$$\text{et }]-r, r[\cap E = E \neq \emptyset \text{ si } r > 1$$

$$\text{Ainsi } \overline{E} = [0, 1]$$

- $1 \in E$ est un point adhérent à $E^c =]-\infty, 0] \cup]1, \infty[$ car

$$]1-r, 1+r[\cap E^c =]1, 1+r[\neq \emptyset \text{ si } 0 < r < 1$$

$$]1-r, 1+r[\cap E^c =]1-r, 0] \cup]1, 1+r[\neq \emptyset \text{ si } r \geq 1$$

$$\text{Ainsi, } \overline{E^c} =]-\infty, 0] \cup [1, \infty[\text{ et } \partial E = \{0, 1\} = \partial E^c$$

2. Soit $B(\vec{a}, r) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{a}\| < r \}$ (boule ouverte)

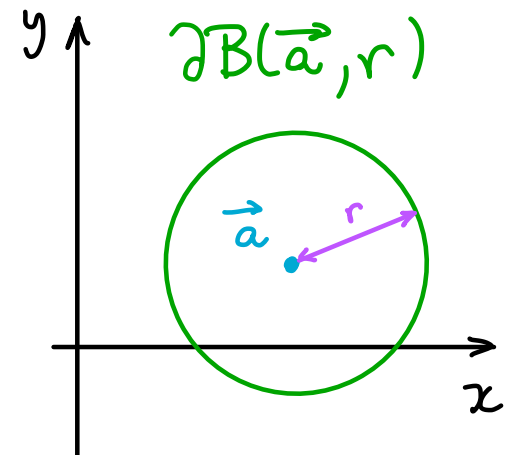
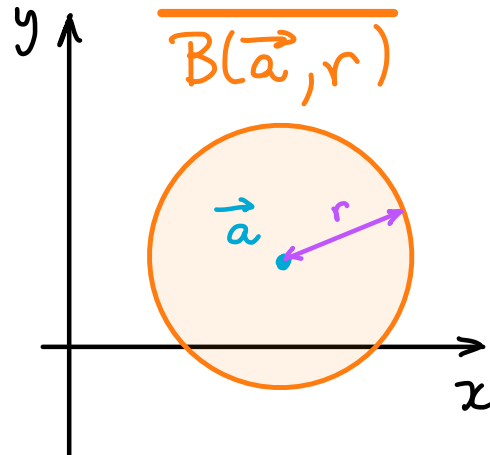
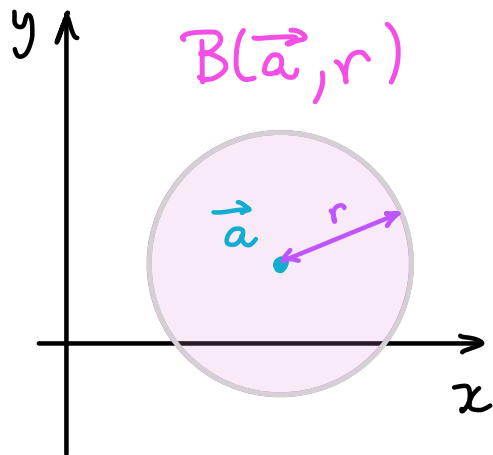
Nous avons :

$$B(\vec{a}, r)^c = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{a}\| \geq r \} \quad (\text{complément})$$

$$\overline{B(\vec{a}, r)} = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{a}\| \leq r \} \quad (\text{adhérence})$$

$$\partial B(\vec{a}, r) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{a}\| = r \} \quad (\text{bord})$$

$n=2$:



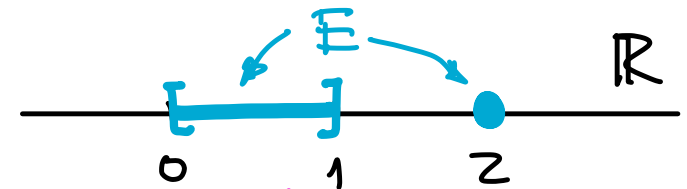
Définition.

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$.

On dit que $\vec{x} \in E$ est un **point isolé** de E s'il existe un nombre $r > 0$ tel que $B(\vec{x}, r) \cap E = \{\vec{x}\}$

Exemple.

Soit $E = [0, 1] \cup \{2\}$



$x=2$ est un point isolé de E car en prenant $r = \frac{1}{2}$

nous avons $B(2, \frac{1}{2}) =]2 - \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2}[=]\frac{3}{2}, \frac{5}{2}[$

d'où $B(2, \frac{1}{2}) \cap E = \{2\}$.

[$x=2$ est un point frontière mais n'est pas un point intérieur]

Conséquences des définitions.

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble non-vide.

Nous avons :

$$1. \overset{\circ}{E} \subset E \subset \overline{E}$$

$$2. \overline{E} = \overset{\circ}{E} \sqcup \partial E \quad (\text{réunion disjointe})$$

$$3. \overset{\circ}{E} = E \iff E \text{ est ouvert}$$

$$4. E = \overline{E} \iff E \text{ est fermé}$$

5. $\overset{\circ}{E}$ est le plus grand ouvert contenu dans E .

6. $\overline{E}$ est le plus petit fermé qui contient E .

$$7. \partial E = \overline{E} \cap \overline{E^c}$$

Définition.

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$.

- On dit que E est **borné** s'il existe un nombre $M \geq 0$ tel que

$$\|\vec{x}\| \leq M \quad \text{pour tout } \vec{x} \in E$$

Autrement dit, si E peut être contenu dans une boule de rayon fini.

- On dit que E est **compact** si E est fermé et borné.

Exemples.

1. Si $E \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble borné, alors son adhérence $\overline{E}$ est un ensemble compact.
2. Tout intervalle fermé $[a, b] \subset \mathbb{R}$, avec $a \leq b$ est compact.

2.3. Autres normes (et distances) sur $\mathbb{R}^n$.

De manière générale, une **norme** sur $\mathbb{R}^n$ est une application qui associe à chaque élément $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ un nombre $\|\vec{x}\| \in \mathbb{R}$ telle que les trois propriétés suivantes sont satisfaites:

1. **Positivité**: $\|\vec{x}\| \geq 0$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

De plus, $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

2. **Homogénéité**:

$$\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\| \text{ pour tout } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}$$

3. **Inégalité triangulaire**:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \text{ pour tout } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$$

Exemples importants

- $\|\vec{x}\|_2 = \left(\sum_{k=1}^m x_k^2 \right)^{1/2} = \|\vec{x}\|$ (norme euclidienne)
- $\|\vec{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = \sum_{k=1}^m |x_k|$
- Plus généralement :
$$\|\vec{x}\|_p = \left(\sum_{k=1}^m |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad \text{avec } p > 1$$
- $\|\vec{x}\|_\infty = \max_{k \in \{1, \dots, n\}} \{ |x_k| \}$

(voir série 6)

Remarques.

- Si $n=1$, alors $\vec{x}=(x)$ et

$$\|\vec{x}\|_2 = |x| = \|\vec{x}\|_1 = \|\vec{x}\|_\infty = \|\vec{x}\|_p \quad \text{pour tout } p > 1.$$

- Si $n > 1$, alors en général nous n'avons plus l'égalité.

Par exemple, si $n=2$ et $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ alors :

$$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

$$\|\vec{x}\|_1 = |3| + |-4| = 7$$

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max(|3|, |-4|) = 4$$

On remarque que

$$\|\vec{x}\|_\infty \leq \|\vec{x}\|_2 \leq \|\vec{x}\|_1$$

Définition.

Deux normes $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ sont équivalentes s'il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que

$$c_1 \|\vec{x}\|_a \leq \|\vec{x}\|_b \leq c_2 \|\vec{x}\|_a, \text{ pour tout } \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

Théorème (sans démonstration)

Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

Cas particuliers (voir série 6):

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|\vec{x}\|_1 \leq \|\vec{x}\|_2 \leq \|\vec{x}\|_1 \quad \Leftrightarrow \quad \|\vec{x}\|_2 \leq \|\vec{x}\|_1 \leq \sqrt{n} \|\vec{x}\|_2$$

$$\|\vec{x}\|_\infty \leq \|\vec{x}\|_2 \leq \sqrt{n} \|\vec{x}\|_\infty \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \|\vec{x}\|_2 \leq \|\vec{x}\|_\infty \leq \|\vec{x}\|_2$$

De manière générale, une *distance* sur $\mathbb{R}^n$ est une application qui associe à chaque couple d'éléments $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ un nombre $d(\vec{x}, \vec{y})$ telle que les trois propriétés suivantes sont satisfaites:

1. *Positivité*: $d(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0$ pour tout $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

De plus, $d(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{y}$

2. *Symétrie*: $d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x})$ pour tout $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

3. *Inégalité triangulaire*:

$d(\vec{x}, \vec{y}) \leq d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{z}, \vec{y})$ pour tout $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$

Exemple important:

distance euclidienne: $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$

Exemple anecdotique (dans $\mathbb{R}^2$):

distance SNCF:

$$d_{\text{SNCF}}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{cases} \|\vec{x} - \vec{y}\| & \text{si } \vec{x} = \lambda \vec{y} \\ \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| & \text{sinon} \end{cases}$$

