

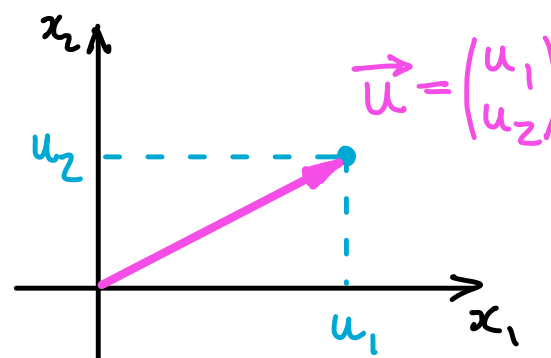
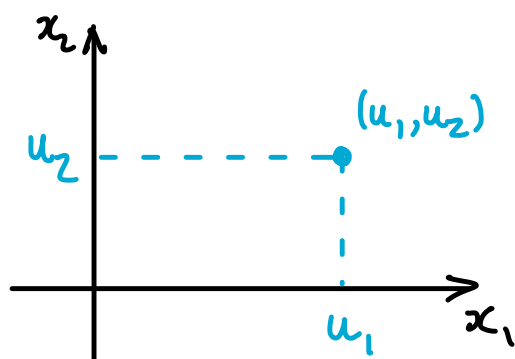
Chapitre 2. L'espace $\mathbb{R}^n$

Rappel.

L'ensemble des vecteurs à deux composantes est appelé $\mathbb{R}^2$.

Les éléments de $\mathbb{R}^2$ sont de la forme $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, avec $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$.

On va identifier les points du plan avec les vecteurs de $\mathbb{R}^2$:



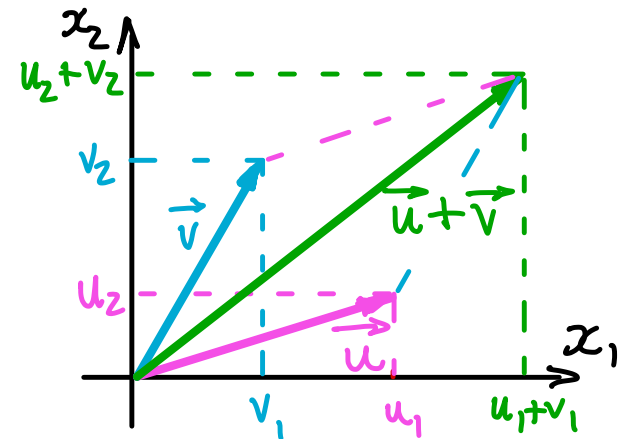
On écrira parfois (x, y) au lieu de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ pour parler du vecteur de composantes x, y .

Attention. Ne pas confondre (x, y) avec $(x \ y)$ (matrice de taille 1×2)

Addition de vecteurs de $\mathbb{R}^2$:

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$. On a:

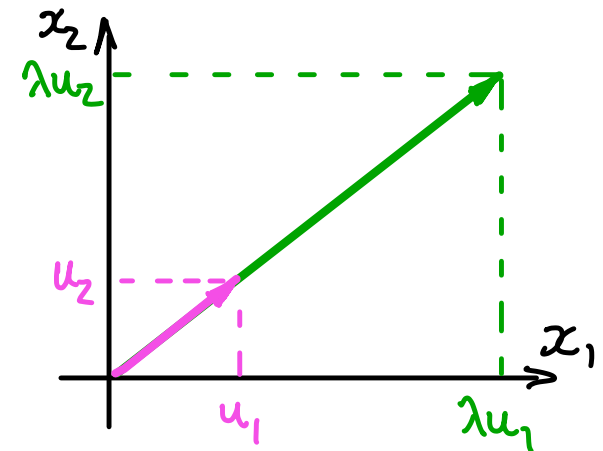
$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}$$



Multiplication d'un vecteur par un scalaire:

Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a:

$$\lambda \vec{u} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \end{pmatrix}$$



De manière générale, on peut définir $\mathbb{R}^n$, avec $n \geq 3$, comme l'ensemble des vecteurs de la forme $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, avec $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{R}$

muni des opérations

- addition de vecteurs: $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$, pour tout $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

- multiplication par un scalaire: $\lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix}$, pour tout $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

Remarque.

On va identifier le n -tuple $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ au vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel:

1. Commutativité de l'addition: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$
2. Associativité de l'addition: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ pour tout $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$
3. Élément neutre pour l'addition: le vecteur $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ est tel que:
$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} \quad \text{et} \quad \vec{0} + \vec{u} = \vec{u} \quad \text{pour tout } \vec{u} \in \mathbb{R}^n$$
4. Inverse: Le vecteur $-\vec{u} = (-1)\vec{u}$ est tel que
$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0} \quad \text{et} \quad (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$$
5. $c(\vec{u} + \vec{v}) = c\vec{u} + c\vec{v}$ pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$
6. $(c+d)\vec{u} = c\vec{u} + d\vec{u}$ pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ et $c, d \in \mathbb{R}$
7. $c(d\vec{u}) = (cd)\vec{u}$ pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ et $c, d \in \mathbb{R}$
8. $1\vec{u} = \vec{u}$ pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

Définition. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Le nombre réel

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^T \vec{v}$$

est appelé **produit scalaire (euclidien)** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On le note aussi $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, alors on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^T \vec{v} = (u_1 \cdots u_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = \sum_{j=1}^n u_j v_j$$

Remarque.

Il est possible de définir d'autres produits scalaires sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème. Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On a:

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (commutativité)

2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (distributivité)

3. $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v})$

4. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

De plus : $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Preuve.

$$1. \text{ On a } \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^T \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

$$\text{et } \vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{v}^T \vec{u} = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n$$

$$2. \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \vec{u}^T (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}^T \vec{v} + \vec{u}^T \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$3. (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = (\lambda \vec{u})^T \vec{v} = \lambda \vec{u}^T \vec{v} = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \vec{u}^T (\lambda \vec{v}) = \lambda \vec{u}^T \vec{v} = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$4. \vec{u} \cdot \vec{u} = \underbrace{u_1^2}_{\geq 0} + \underbrace{u_2^2}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{u_n^2}_{\geq 0} \geq 0$$

Pour avoir une somme nulle, il faut que chaque terme soit nul:

$u_j^2 = 0$ pour tout j . Autrement dit, $u_j = 0$ pour tout j . ■

2.1. Norme et distance.

Définition. Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. La norme (euclidienne) ou longueur du vecteur $\vec{x}$ est le nombre

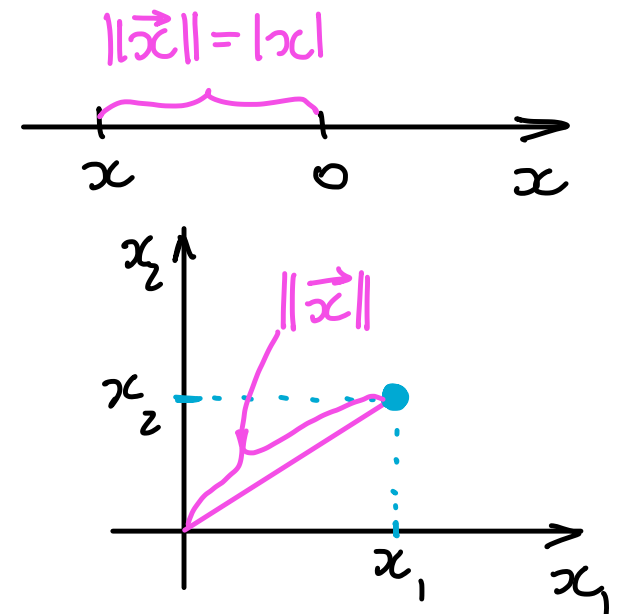
$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} \geq 0$$

Remarque. Pour des calculs théoriques, on utilise plutôt la formule $\|\vec{x}\|^2 = \vec{x} \cdot \vec{x}$.

Cas particuliers:

$$n=1: \|\vec{x}\| = \sqrt{x^2} = |x| \text{ (valeur absolue)}$$

$$n=2: \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$



Propriétés.

1. Positivité : $\|\vec{x}\| \geq 0$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

De plus, $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

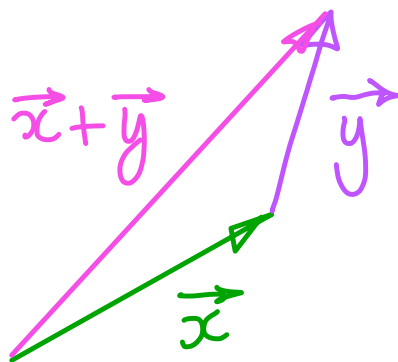
2. Homogénéité :

$$\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\| \text{ pour tout } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}$$

3. Inégalité triangulaire :

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \text{ pour tout } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$$

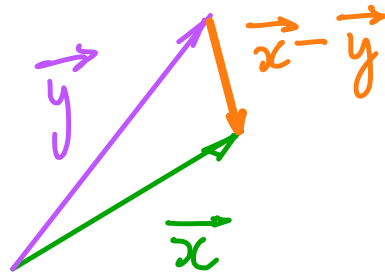
(T)



Définition - Soient $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. On définit la distance entre $\vec{x}$ et $\vec{y}$ par

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

Geométriquement:



Propriétés.

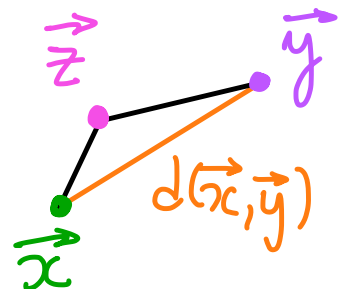
1. Positivité: $d(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0$ pour tout $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

De plus, $d(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{y}$

2. Symétrie: $d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x})$ pour tout $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

3. Inégalité triangulaire:

$d(\vec{x}, \vec{y}) \leq d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{z}, \vec{y})$ pour tout $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$



Inégalités importantes :

1. inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \quad \text{pour tout } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \quad (\text{CS})$$

$$[\text{car } \vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \theta]$$

2. inégalité triangulaire inverse :

$$|\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\| \quad \text{pour tout } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \quad (\text{TI})$$

Remarques.

(CS) $\Rightarrow$ (T) : En effet,

$$\begin{aligned}\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 &= (\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{x} + 2\vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{y} \\ &= \|\vec{x}\|^2 + 2\vec{x} \cdot \vec{y} + \|\vec{y}\|^2 \leq \|\vec{x}\|^2 + 2|\vec{x} \cdot \vec{y}| + \|\vec{y}\|^2 \\ &\stackrel{(CS)}{\leq} \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 = (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2\end{aligned}$$

d'où $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

(T) $\Rightarrow$ (TI) : En effet,

$$\left. \begin{aligned}\|\vec{x}\| &= \|(\vec{x} - \vec{y}) + \vec{y}\| \stackrel{(T)}{\leq} \|\vec{x} - \vec{y}\| + \|\vec{y}\| \\ \|\vec{y}\| &= \|(\vec{y} - \vec{x}) + \vec{x}\| \stackrel{(T)}{\leq} \|\vec{y} - \vec{x}\| + \|\vec{x}\|\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\| \\ \|\vec{y}\| - \|\vec{x}\| \leq \|\vec{y} - \vec{x}\| \end{cases}$$

d'où $|\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\|$

2.2. Sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$

Définition. Soit $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. L'ensemble

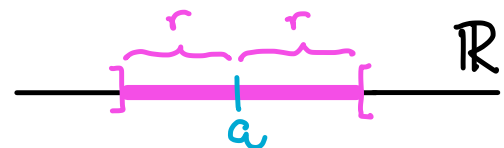
$$B(\vec{a}, r) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : d(\vec{x}, \vec{a}) < r \} = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \| \vec{x} - \vec{a} \| < r \}$$

est appelé *boule ouverte* de centre $\vec{a}$ et rayon r .

Cas particuliers :

$$n=1: B(a, r) = \{ x \in \mathbb{R} : |x - a| < r \}$$

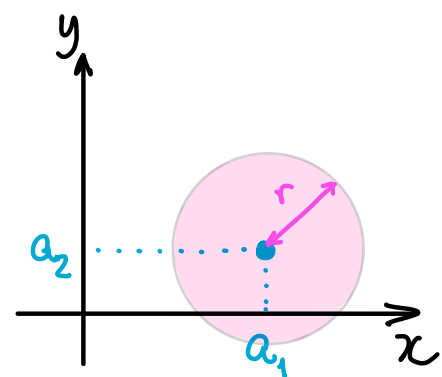
$$\Rightarrow B(a, r) =]a - r, a + r[\quad (\text{intervalle ouvert})$$



$$n=2: B((a_1, a_2), r) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2} < r \}$$

$$\Rightarrow B((a_1, a_2), r) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 < r^2 \}$$

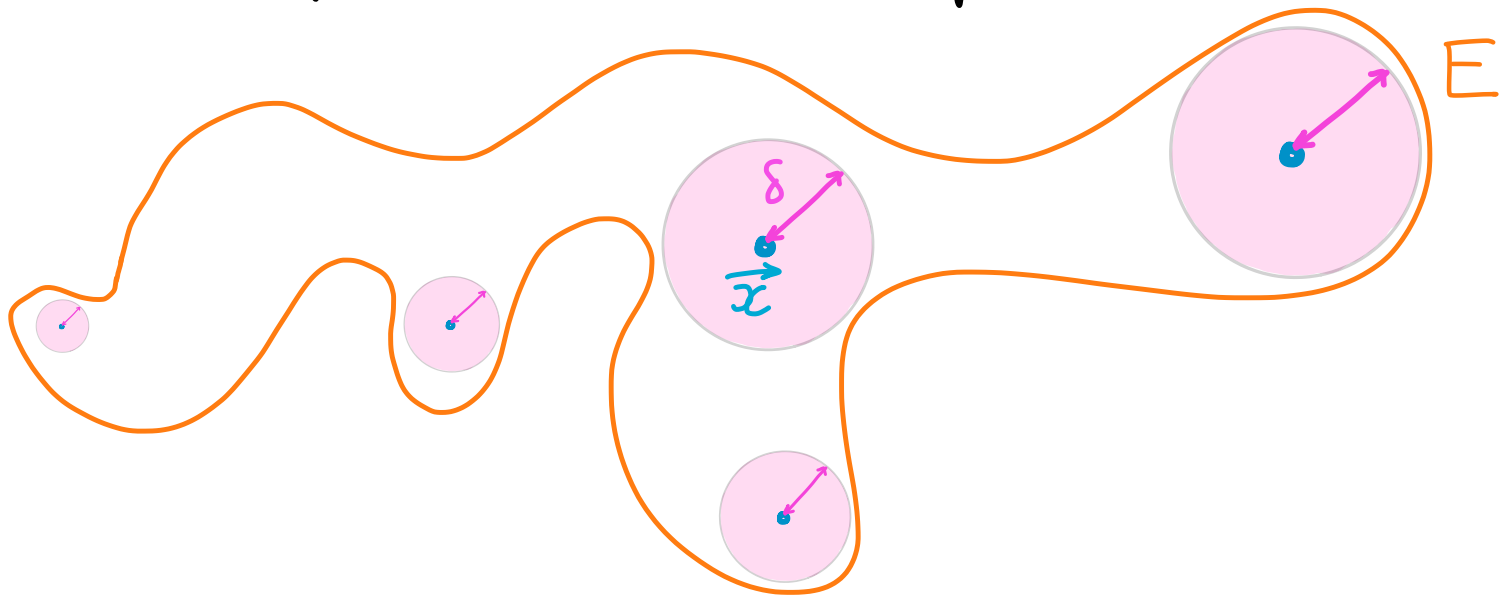
(disque ouvert de rayon r et centre $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$)



Définition.

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ (on note $E \subset \mathbb{R}^n$).

On dit que $\vec{x} \in E$ est un point intérieur à E s'il existe un nombre $\delta > 0$ (qui dépend de $\vec{x}$) tel que $B(\vec{x}, \delta) \subset E$.



L'ensemble $\overset{\circ}{E} = \{ \vec{x} \in E : \text{il existe } \delta > 0 \text{ tel que } B(\vec{x}, \delta) \subset E \}$ de tous les points intérieurs à E est appelé l'intérieur de E .

Remarque.

Par construction, $\overset{\circ}{E} \subset E$.

Définition.

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$. On dit que E est ouvert si tous les éléments de E sont des points intérieurs à E :

$$E = \overset{\circ}{E}$$

Autrement dit, E est ouvert si pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un nombre $\delta > 0$ (qui dépend de $\vec{x}$) tel que $B(\vec{x}, \delta) \subset E$.

Convention.

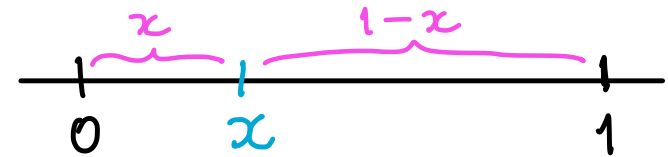
L'ensemble vide $\emptyset$ est ouvert.

Exemples.

1. $E = \mathbb{R}^n$ est ouvert. En effet, pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ nous avons

$$B(\vec{x}, 1) \subset \mathbb{R}^n$$

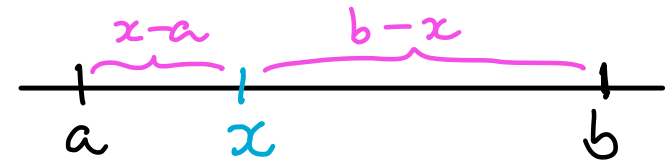
2. $E =]0, 1[\subset \mathbb{R}$ est ouvert.



En effet, si $x \in]0, 1[$, alors $\delta = \min(x, 1-x) > 0$ est tel que

$$B(x, \delta) =]x-\delta, x+\delta[\subset]0, 1[$$

3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.



$E =]a, b[\subset \mathbb{R}$ est ouvert.

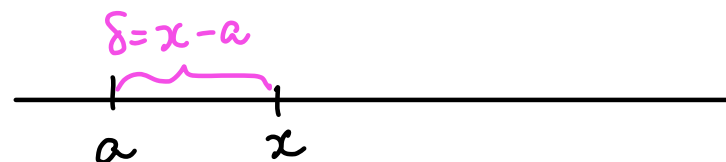
En effet, si $x \in]a, b[$, alors $\delta = \min(x-a, b-x) > 0$ est tel que

$$B(x, \delta) =]x-\delta, x+\delta[\subset]a, b[.$$

4. $E =]a, \infty[\subset \mathbb{R}$ est ouvert pour tout $a \in \mathbb{R}$.

En effet, si $x \in E$, alors $x > a$ et $\delta = x - a > 0$ est tel que

$$B(x, \delta) =]x - \delta, x + \delta[\subset E$$



5. $E =]0, 1] \subset \mathbb{R}$ n'est pas ouvert car $1 \in E$ n'est pas un point intérieur vu qu'il n'existe pas de nombre $\delta > 0$ tel que

$$]1 - \delta, 1 + \delta[= B(1, \delta) \subset]0, 1]$$