Chapitre 1: Equations différentielles ordinaires.

1.1. Définitions et exemples.

Définition. Une équation différentielle ordinaire (EDO) est une équation mettant en relation :

- une variable (par exemple x ou t),
- une fonction inconnue y qui dépend de la variable,
- certaines dérivées de la fonction y par rapport à la variable: $y', y'', y''', \ldots$

On appelle ordre de l'équation différentielle ordinaire, l'ordre de la dérivée la plus élevée qui apparaît dans l'équation.

Le terme "ordinaire" fait allusion au fait que la fonction inconnue dépend d'une seule variable. Les équations différentielles aux dérivées partielles font appel à des fonctions de plusieurs variables.
Dans ce cours, on étudiera seulement des équations différentielles ordinaires et de ce fait, le terme "ordinaire" sera omis par la suite.

Exemples.

1. $y'(x) = x^2$, ordre 1
2. $y'(x) = (y(x))^2$, ordre 1
3. $y'(x) = x^3 + \sqrt{y(x)}$, ordre 1
4. $y''(x) + 6y'(x) + y(x) = e^x$, ordre 2
5. $y^{(4)}(x) + y(x) = x^5 + \sin(x)$, ordre 4

Définition.

- On appelle solution d'une équation différentielle d'ordre n toute fonction de classe C^n qui la satisfait sur un intervalle ouvert (non-vide) $I \subset \mathbb{R}$.
- On dit qu'une solution $y : I \to \mathbb{R}$ est maximale s'il n'existe pas de solution $\tilde{y} : J \to \mathbb{R}$ telle que $I \subset J$, $I \neq J$ et y est une restriction de $\tilde{y}$ sur l'intervalle I.
- On appelle solution générale d'une équation différentielle, l'ensemble de toutes les solutions de l'équation différentielle.

Exemples.

1. Considérons l'équation différentielle $y'(x) = 5x^4$.
   - La fonction $y(x) = x^5$ (définie sur $\mathbb{R}$) est une solution (maximale) de $y'(x) = 5x^4$ car $(x^5)' = 5x^4$.
   - Toute fonction de la forme $y(x) = x^5 + c$, avec $c \in \mathbb{R}$ est aussi une solution de $y'(x) = 5x^4$ sur $\mathbb{R}$.

   Nous savons par le cours d'Analyse I qu'il n'y a pas d'autre solution. Par conséquent, la solution générale est l'ensemble des fonctions $y(x) = x^5 + c$ (définies sur $\mathbb{R}$) avec $c \in \mathbb{R}$. Par abus de langage, on dira que $\boxed{y(x) = x^5 + c,\ \text{avec } c \in \mathbb{R}}$ est la solution générale.

2. Comme $y(x) = \frac{1}{x-3}$ est telle que $y'(x) = -\frac{1}{(x-3)^2}$, alors

$y(x) = \frac{1}{x-3}$, avec $x \in]-\infty, 3[$

et $y(x) = \frac{1}{x-3}$, avec $x \in]3, +\infty[$

sont des solutions (maximales) de $y'(x) = -\frac{1}{(x-3)^2}$

Convention: Si le domaine d'une solution y d'une équation différentielle d'ordre n n'est pas donné de manière explicite, alors on prend le plus grand intervalle ouvert (non-vide) $I \subset \mathbb{R}$ où y est une fonction de classe C^n.

Ainsi, la solution générale de $y'(x) = -\frac{1}{(x-3)^2}$ peut s'écrire

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{x-3} + c, \text{ avec } c \in \mathbb{R}}$$

Lorsqu'on se donne une équation différentielle, deux types de problème se posent:

1) Trouver la solution générale de l'équation différentielle
2) Trouver une solution de l'équation différentielle qui satisfait des conditions supplémentaires (appelées conditions initiales).

Remarque.

La recherche d'une solution d'une équation différentielle avec conditions initiales est appelée problème de Cauchy.

Exemple.

Résoudre $y''(x)=0$ (ordre 2)

L'intégration nous donne : $y'(x)=a$, avec $a\in\mathbb{R}$

et $\boxed{y(x)=ax+b \ , \text{avec } a,b\in\mathbb{R}}$ (solution générale)

Si on demande en plus $\begin{cases} y(1)=5 \\ y'(1)=2 \end{cases}$ (conditions initiales)

on obtient : $\begin{cases} 5=a\cdot 1+b \\ 2=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ a=2 \end{cases}$

Ainsi, la solution cherchée est

$$\boxed{y(x)=2x+3}$$

1.2. Equations différentielles séparables d'ordre 1.

L'équation différentielle $y'(x)=g(x)$, où g est une fonction continue peut être résolue en intégrant par rapport à x :

$$\int y'(x)\,dx=\int g(x)\,dx$$

$\Rightarrow \boxed{y(x)=G(x)+c}$, avec G une primitive de g et $c\in\mathbb{R}$

Il y a une famille importante d'équations différentielles qui peut être résolue de manière analogue.

Définition.

Une équation différentielle d'ordre 1 est **séparable** si elle peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{y'(x) = g(x)\, h(y(x))}$$

où g est une fonction qui dépend de la variable x
et h est une fonction qui dépend de y

Remarque.

On va montrer plus tard que l'équation différentielle séparable $y'(x) = g(x)\, h(y(x))$ avec condition initiale $y(x_0)=y_0$ possède une unique solution lorsque g et h sont des fonctions continues.

Exemples.

1. $y'(x) = g(x) = g(x)\cdot 1$ est séparable
2. $y'(x) = 2x\,(y(x))^2$ est séparable
3. $y'(x) = 3x^2\,(y(x)-3)$ est séparable

Par contre, $y'(x) = x + y(x)$ n'est pas séparable

Remarque.

– S'il existe un nombre $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $h(y_0)=0$, alors la fonction constante $\boxed{y(x)=y_0}$, avec $x \in \mathbb{R}$, est une solution de l'équation séparable $y'(x)=g(x)\,h(y(x))$, appelée solution singulière.

En effet, $(y_0)'=0$ et $g(x)h(y_0)=g(x)\cdot 0=0$.

Question. Comment trouver la solution générale d'une équation séparable $y'(x)=g(x)\,h(y(x))$?

Réponse. Méthode de séparation des variables.

Illustrons la méthode à l'aide de quelques exemples :

Exemples.

1. Trouver la solution générale de l'équation différentielle

$y'(x) = 2x\,(y(x))^2$ [notation abrégée : $y'=2xy^2$]

[La continuité de $g(x)=2x$ et $h(y)=y^2$ garantit l'existence des solutions de l'équation différentielle]

La fonction $h(y)=y^2$ s'annule en $y=0$. Par conséquent, $\boxed{y(x)=0}$ est une solution singulière.

Si $y(x) \neq 0$, alors on « sépare » les variables : $(y(x))^{-2}\, y'(x) = 2x$

On intègre par rapport à x :

$$\int (y(x))^{-2}\, y'(x)\, dx = \int 2x\, dx \iff -(y(x))^{-1} = x^2 + c, \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

$$\left[\int (y(x))^{-2}\, y'(x)\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ u = y(x) \\ du = y'(x)\,dx}}{=} \int u^{-2}\, du = -u^{-1} + c = -(y(x))^{-1} + c \right]$$

A ce stade, il s'agit d'expliciter $y(x)$ (lorsque cela est possible) :

$$\frac{1}{y(x)} = -x^2 - C \iff y(x) = \frac{1}{-x^2 - C}, \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

Solution générale :

$$\boxed{\begin{cases} y(x) = 0 & \text{(solution singulière)} \\ y(x) = \dfrac{1}{-x^2 - C}, & \text{avec } C \in \mathbb{R}. \end{cases}}$$

2. Trouver la solution (maximale) de $y'(x) = 2x\,(y(x))^2$

qui satisfait la condition initiale $\boxed{y(0) = 4}$

Commençons par déterminer la valeur de la constante C :

On a : $\frac{1}{4} = \frac{1}{y(0)} = -0^2 - C \Rightarrow \boxed{C = -\frac{1}{4}}$

La solution cherchée est donc : $y(x) = \dfrac{1}{-x^2 + \frac{1}{4}} = \dfrac{4}{1 - 4x^2}$

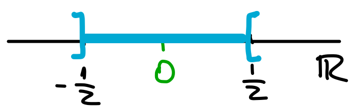
Cherchons maintenant le plus grand intervalle ouvert I

qui contient $x = 0$ où y est de classe C^1 :

On a $1 - 4x^2 = 0 \iff (1 - 2x)(1 + 2x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{1}{2}$

La solution maximale est donc :

$$\boxed{y(x) = \frac{4}{1 - 4x^2}, \text{ avec } x \in \left]-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right[}$$



3. Trouver la solution (maximale) de $y'(x) = 2x\,(y(x))^2$

qui satisfait la condition initiale $\boxed{y(-1) = -\frac{4}{3}}$

Commençons par déterminer la valeur de la constante C :

On a : $-\frac{3}{4} = \frac{1}{y(-1)} = -(-1)^2 - C \Rightarrow \boxed{C = -\frac{1}{4}}$ (comme pour l'exemple 2)

La solution cherchée est donc : $y(x) = \dfrac{1}{-x^2 + \frac{1}{4}} = \dfrac{4}{1-4x^2}$

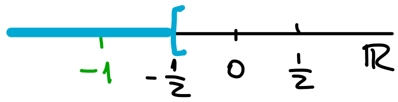
Cherchons maintenant le plus grand intervalle ouvert I

qui contient $x = -1$ où y est de classe C^1 :

On a $1 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow (1-2x)(1+2x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{1}{2}$

la solution maximale est donc :

$$\boxed{y(x) = \frac{4}{1-4x^2}\,,\ \text{avec } x \in \left]-\infty, -\tfrac{1}{2}\right[}$$



4. Trouver la solution générale de l'équation différentielle

$y'(x) = \frac{1}{x^3}\left((y(x))^2 + 1\right)$, avec $x > 0$.

[la condition $x > 0$ garantit la continuité de $g(x) = \frac{1}{x^3}$ et par conséquent, l'existence des solutions de l'équation différentielle]

Comme $h(y) = y^2 + 1 \geq 1$ ne s'annule pas, il n'y a pas de solutions singulières.

On "sépare" les variables : $\left((y(x))^2 + 1\right)^{-1} y'(x) = \frac{1}{x^3}$

On intègre par rapport à x :

$$\int \frac{1}{(y(x))^2+1}\, y'(x)\, dx = \int x^{-3} dx \iff \arctan(y(x)) = \frac{x^{-2}}{-2} + C$$

$$\left[\int \frac{1}{(y(x))^2+1}\, y'(x)\, dx \underset{\substack{u=y(x)\\ du=y'(x)dx}}{\overset{\uparrow}{=}} \int \frac{1}{u^2+1}\, du = \arctan(u)+C = \arctan(y(x))+C\right]$$

A ce stade, il s'agit d'expliciter $y(x)$ (lorsque cela est possible) :

$$\boxed{y(x) = \tan\left(C - \frac{1}{2x^2}\right), \text{ avec } C\in\mathbb{R}} \quad \text{(solution générale)}$$

5. Trouver la solution générale de l'équation différentielle

$$y'(x) = xe^{x+y(x)}$$

L'équation donnée est séparable : $y'(x) = xe^{x}e^{y(x)}$

[La continuité de $g(x) = xe^x$ et $h(y) = e^y$ garantit l'existence des solutions de l'équation différentielle]

Comme $h(y) = e^y > 0$ ne s'annule pas, il n'y a pas de solutions singulières.

On "sépare" les variables : $e^{-y(x)}y'(x) = xe^x$

On intègre par rapport à x :

$$\underbrace{\int e^{-y(x)}y'(x)\, dx}_{=-e^{-y(x)}} = \int \underset{\downarrow\, 1}{x}\, \underset{\uparrow\, e^x}{e^x}\, dx = xe^x - \int 1\cdot e^x dx = xe^x - e^x + C$$

Nous avons donc $-e^{-y(x)} = e^{x}(x-1)+c$, avec $C \in \mathbb{R}$

ou encore $e^{-y(x)} = e^{x}(1-x)-c$

A ce stade, il s'agit d'expliciter $y(x)$ (lorsque cela est possible):

$$-y(x) = \ln\left(e^{x}(1-x)-c\right)$$

La solution générale est donc :

$$\boxed{y(x) = -\ln\left(e^{x}(1-x)-C\right) \text{, avec } C \in \mathbb{R}}$$

6. Trouver la solution de l'équation différentielle $y'(x) = xe^{x+y(x)}$ qui satisfait la condition initiale $y(0)=0$.

Nous avons $1 = e^{-0} = e^{-y(0)} = e^{0}(1-0)-c = 1-C \Rightarrow C=0$

La solution cherchée est donc $y(x) = -\ln\left(e^{x}(1-x)\right)$

autrement dit $\boxed{y(x) = -x-\ln(1-x)}$

La solution est maximale si l'on considère l'intervalle $]-\infty, 1[$.

7. Trouver la solution de l'équation différentielle $y'(x) = xe^{x+y(x)}$ qui satisfait la condition initiale $y(1)=0$.

Nous avons $e^{-0} = e^{-y(1)} = e^{1}(1-1)-c = -C \Rightarrow C=-1$

La solution cherchée est donc $\boxed{y(x) = -\ln\left(e^{x}(1-x)+1\right)}$

Méthode de résolution des équations séparables $y'(x) = g(x)\,h(y(x))$

(avec g et h des fonctions continues):

- Trouver les zéros de la fonction h (s'ils existent) pour obtenir les solutions singulières.
- "Séparer" les variables et intégrer par rapport à x.
- Expliciter $y(x)$ lorsque cela est possible.
- S'il y a une condition initiale $y(x_0) = y_0$, fixer la constante.

1.3. Equations différentielles linéaires d'ordre 1.

Définition. Une équation différentielle linéaire d'ordre 1 est une équation qui peut être mise sous la forme :

$$\boxed{y'(x) = g(x)\,y(x) + f(x)}$$

où f et g sont des fonctions de la variable x.

La fonction f est appelée terme inhomogène.

Remarque.

On va montrer plus tard que si f et g sont continues alors l'équation différentielle linéaire $y'(x) = g(x)\,y(x) + f(x)$ possède une unique solution qui satisfait la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

A. Equation différentielle linéaire homogène.

Si $f(x)=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, alors on a l'équation différentielle

$$\boxed{y'(x) = g(x)\,y(x)} \qquad (H)$$

appelée équation différentielle linéaire homogène.

Constat : Il s'agit d'une équation séparable (avec $h(y)=y$) !

Par conséquent, on sait la résoudre.

La fonction $h(y)=y$ s'annule en $y_0=0$. Par conséquent, la fonction constante $\boxed{y(x)=0}$ est une solution singulière de (H).

Si $y(x)\neq 0$, alors on "sépare" les variables : $\frac{1}{y(x)}\,y'(x) = g(x)$

On intègre par rapport à x :

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = \int g(x)\,dx$$

d'où $\ln|y(x)| = G(x)+c$ où G est une primitive de g et $c\in\mathbb{R}$.

A ce stade, il s'agit d'expliciter $y(x)$:

$$|y(x)| = e^{G(x)+c} = e^{c}e^{G(x)}$$

d'où $|y(x)| = Ke^{G(x)}$, où nous avons posé $K=e^{c}>0$

Ainsi $y(x) = \pm Ke^{G(x)}$

ou encore $y(x) = ce^{G(x)}$, où $c=\pm K\neq 0$

Par conséquent, la solution générale s'écrit

$$\begin{cases} y(x) = 0 \quad \text{(solution singulière)} \\ y(x) = c\, e^{G(x)} \quad , \text{avec } c \neq 0. \end{cases}$$

ou plus simplement, $\boxed{y(x) = c\, e^{G(x)} \quad , \text{ avec } c \in \mathbb{R}}$

Méthode de résolution des équations linéaires homogènes $y'(x) = g(x)\, y(x)$

(avec g fonction continue):

- Trouver une primitive G de g.
- Ecrire la solution générale $y(x) = c\, e^{G(x)}$, avec $c \in \mathbb{R}$.
- S'il y a une condition initiale $y(x_0) = y_0$, fixer la constante.

Exemples.

1. Trouver la solution générale de l'équation différentielle

$$y'(x) = \cot(x)\, y(x) \quad , \text{avec } x \in \,]0, \pi[$$

[la fonction $g(x) = \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ est continue sur $]0, \pi[$]

On a $\int \cot(x)\, dx = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\, dx = \int \frac{(\sin(x))'}{\sin(x)}\, dx$

$$= \ln|\sin(x)| + \tilde{c} \quad , \text{avec } \tilde{c} \in \mathbb{R}$$

Comme on cherche une primitive, on prend

$$G(x) = \ln|\sin(x)| \quad \text{(primitive associée à } \tilde{c} = 0\text{)}$$

Comme $x \in \,]0, \pi[$ on peut écrire

$$G(x) = \ln(\sin(x))$$

Par conséquent, le solution générale de l'équation différentielle

$$y'(x) = \cot(x)\, y(x) \quad \text{, avec } x \in]0, \pi[$$

est $\quad y(x) = c e^{\ln(\sin(x))}$, avec $c \in \mathbb{R}$

autrement dit, $\quad \boxed{y(x) = c \sin(x)}$, avec $c \in \mathbb{R}$

Pour chaque valeur de $c \in \mathbb{R}$, la solution maximale est définie sur l'intervalle $]0, \pi[$.

Vérification:

$$y'(x) = (c \sin(x))' = c \cos(x)$$

$$\cot(x) \cdot y(x) = c \cdot \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \cdot \sin(x) = c \cdot \cos(x)$$

2. Modèle simple de croissance de la population.

<u>Hypothèse</u>: "La variation du nombre d'individus est proportionnelle au nombre d'individus".

Soit $y(t) > 0$ le nombre d'individus au temps t.

L'hypothèse peut s'écrire:

$$y'(t) = a\, y(t) \text{, avec } a > 0 \text{ une constante.}$$

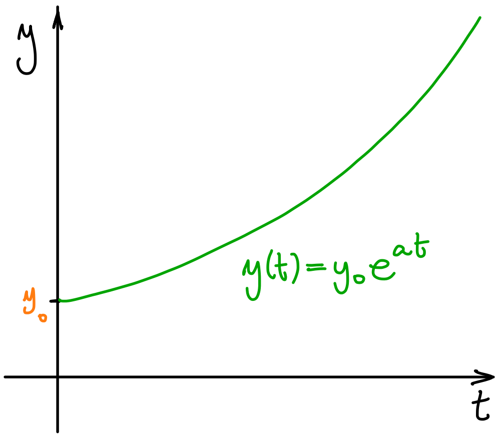
Il s'agit d'une équation linéaire homogène! (avec $g(t) = a$ fonction constante).

Comme $G(t) = at$ est une primitive de g la solution générale de $y'(t) = a y(t)$ est $\boxed{y(t) = c e^{at}}$, avec $c \in \mathbb{R}$

Si on prend la condition initiale $y(0)=y_0>0$, alors

$$y_0=y(0)=ce^{a\cdot 0}=c$$

et $\boxed{y(t)=y_0e^{at}}$ est la solution cherchée.



(voir l'exercice 10 de la série 2 pour un modèle plus réaliste).

3. Variation de la température d'un corps en fonction du temps.

Soit $T(t)$ la température d'un corps au temps t.

Soit T_a la température ambiante.

- Si $T(t)<T_a$ (ou $T(t)-T_a<0$), alors T augmente ($T'(t)>0$)
- Si $T(t)>T_a$ (ou $T(t)-T_a>0$), alors T diminue ($T'(t)<0$)
- Si $T(t)=T_a$ (ou $T(t)-T_a=0$), alors T ne change pas ($T'(t)=0$)

En première approximation, la variation de la température est proportionnelle à son écart par rapport à T_a :

$$\boxed{T'(t)=-k\,(T(t)-T_a)}$$

où $k>0$ est une constante qui dépend du corps.

Il s'agit d'une équation séparable (avec $g(t)=-k$ et $h(T)=T-T_a$) et aussi d'une équation linéaire inhomogène (avec $g(t)=-k$ et $f(t)=kT_a$, fonctions constantes).

Considérons le changement de variable $\boxed{y(t)=T(t)-T_a}$

Comme $y'(t)=T'(t)-0=T'(t)$, l'équation différentielle devient:

$$y'(t)=-k\,y(t)$$

avec solution générale $y(t)=ce^{-kt}$, avec $c\in\mathbb{R}$.

Ainsi, $T(t)-T_a=ce^{-kt}$.

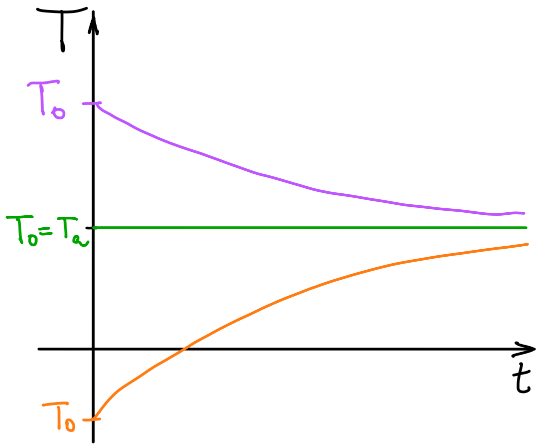
La solution générale de $T'(t)=-k(T(t)-T_a)$ est donc

$$\boxed{T(t)=T_a+ce^{-kt}}\text{, avec } c\in\mathbb{R}.$$

Si on se donne la condition initiale $T(0)=T_0$, on a:

$$T_0=T(0)=T_a+ce^{-k\cdot 0}=T_a \Rightarrow c=T_0-T_a$$

et la solution associée est $\boxed{T(t)=T_a+(T_0-T_a)e^{-kt}}$



Le résultat est raisonnable car $\lim\limits_{t\to\infty} T(t)=T_a$ et $T(t)=T_a$ si $T_0=T_a$.

B. Equation différentielle linéaire inhomogène.

Considérons l'équation différentielle linéaire inhomogène

$$y'(x) = g(x)\, y(x) + f(x) \qquad (I)$$

et l'équation différentielle linéaire homogène associée :

$$y'(x) = g(x)\, y(x) \qquad (H)$$

Théorème. La solution générale de l'équation

$$y'(x) = g(x)\, y(x) + f(x) \qquad (I)$$

s'écrit $\boxed{y(x) = y_{hom}(x) + y_p(x)}$

où y_{hom} est la solution générale de

$$y'(x) = g(x)\, y(x) \qquad (H)$$

et y_p est une solution de (I).

Remarque.

Ce résultat est une généralisation de

$\int h(x)\,dx = H(x) + c$, avec $c \in \mathbb{R}$ et H une primitive de h (qui correspond à $g(x) = 0$ et $f(x) = h(x)$).

Preuve.

Comme y_p est une solution de (I) nous avons :

$$y_p'(x) = g(x)\, y_p(x) + f(x)$$

1. A voir : pour chaque $c \in \mathbb{R}$, la fonction $y_c(x) = y_p(x) + ce^{G(x)}$ est aussi une solution de (I) :

$$\begin{aligned} y_c'(x) &= \left(y_p(x) + ce^{G(x)}\right)' = y_p'(x) + ce^{G(x)}\, G'(x) \\ &= \left(g(x)\, y_p(x) + f(x)\right) + ce^{G(x)} g(x) \\ &= g(x)\left(y_p(x) + ce^{G(x)}\right) + f(x) \\ &= g(x)\, y_c(x) + f(x) \end{aligned}$$

2. Il reste à voir que toutes les solutions de (I) sont de la forme $y_c(x) = y_p(x) + ce^{G(x)}$ pour un certain $c \in \mathbb{R}$.

Soit ψ une solution quelconque de (I). Nous avons :

$$\left.\begin{aligned} \psi'(x) &= g(x)\, \psi(x) + f(x) \\ y_p'(x) &= g(x)\, y_p(x) + f(x) \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow \psi'(x) - y_p'(x) = g(x)\, \psi(x) - g(x)\, y_p(x)$

$\Rightarrow \left(\psi(x) - y_p(x)\right)' = g(x)\left(\psi(x) - y_p(x)\right)$

$\Rightarrow \psi(x) - y_p(x)$ est une solution de (H) et s'écrit

$$\psi(x) - y_p(x) = ce^{G(x)} \quad \text{pour un certain } c \in \mathbb{R}$$

d'où $\psi(x) = y_p(x) + ce^{G(x)}$ ■

Conséquence.

Pour résoudre l'équation linéaire inhomogène (I) il faut :

- résoudre l'équation linéaire homogène (H) :

$$y_{hom}(x) = ce^{G(x)}, \text{ avec } G \text{ une primitive de } g \text{ et } c \in \mathbb{R}.$$

- trouver une solution de (I).

Question. Comment trouver une solution de (I) ?

Réponse 1. Parfois on peut "deviner" la solution.

Exemple.

L'équation différentielle $y'(x) = y(x) + 5$ possède

$$y_p(x) = -5$$

comme solution (car $y_p'(x) = 0$ et $-5+5=0$).

Ainsi, vu que la solution générale de $y'(x) = y(x)$ est

$$y_{hom}(x) = ce^{x}, \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

la solution générale de $y'(x) = y(x)+5$ est

$$y(x) = y_{hom}(x) + y_p(x) = ce^{x} - 5, \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

Réponse 2 : Méthode de la variation de la constante.

Rappel. La solution générale de $y'(x) = g(x)y(x)$ est $y_{hom}(x) = ce^{G(x)}$

Idée. Chercher une solution de $y'(x) = g(x)\,y(x) + f(x)$

de la forme $y_p(x) = \gamma(x)e^{G(x)}$, où γ est une fonction

(on "varie" la constante)

On a $$y_p'(x) = \left(\gamma(x)e^{G(x)}\right)' = \gamma'(x)e^{G(x)} + \underbrace{\gamma(x)e^{G(x)}}_{=y_p(x)}\,\underbrace{G'(x)}_{=g(x)}$$
$$= \gamma'(x)e^{G(x)} + g(x)\,y_p(x)$$

Ainsi, pour que y_p soit une solution de $y'(x) = g(x)\,y(x) + f(x)$

il faut satisfaire $\gamma'(x)e^{G(x)} = f(x)$

Autrement dit $\boxed{\gamma'(x) = f(x)e^{-G(x)}}$

Méthode de résolution des équations linéaires inhomogènes

$y'(x) = g(x)\,y(x) + f(x)$ (avec g et f fonctions continues):

- Trouver une primitive G de g.
- Trouver une primitive γ de $f(x)e^{-G(x)}$
- Ecrire la solution générale
$$y(x) = ce^{G(x)} + \gamma(x)e^{G(x)}, \text{ avec } c \in \mathbb{R}.$$
- S'il y a une condition initiale $y(x_0) = y_0$, fixer la constante.

Remarque.

Par abus de langage, on écrire parfois $G(x) = \int g(x)\,dx$ et

$\gamma(x) = \int f(x)e^{-G(x)}\,dx$

Exemples.

1. Trouver la solution générale de

$$y'(x) = y(x) + 5$$

[Ici $g(x) = 1$ et $f(x) = 5$]

$g(x) = 1 \Rightarrow \boxed{G(x) = x}$

$f(x)e^{-G(x)} = 5e^{-x} \Rightarrow \gamma(x) = \int 5e^{-x}dx = -5e^{-x}$

Solution générale: $y(x) = ce^{x} + (-5e^{-x})e^{x}$

$\Rightarrow \boxed{y(x) = ce^{x} - 5}$, avec $c \in \mathbb{R}$ (comme avant)

Vérification: $(ce^{x} - 5)' = ce^{x}$

$(ce^{x} - 5) + 5 = ce^{x}$

2. Trouver la solution générale de

$$y'(x) = \frac{1}{x}y(x) + x^5 \quad , \text{ avec } x < 0$$

[Ici $g(x) = \frac{1}{x}$ continue sur $]-\infty, 0[$ et $f(x) = x^5$]

$g(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow G(x) = \ln|x| \Rightarrow \boxed{G(x) = \ln(-x)}$ car $x < 0$

$\Rightarrow e^{G(x)} = e^{\ln(-x)} \Rightarrow \boxed{e^{G(x)} = -x}$

$f(x)e^{-G(x)} = x^5(-x)^{-1} = -x^4 \Rightarrow \gamma(x) = \int (-x^4)\,dx = -\frac{x^5}{5}$

Solution générale: $y(x) = c(-x) + \left(-\frac{x^5}{5}\right)(-x)$

$\Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{1}{5}x^6 - cx}$, avec $c \in \mathbb{R}$

Vérification: $\left(\frac{1}{5}x^6 - cx\right)' = \frac{6}{5}x^5 - c$

$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{5}x^6 - cx\right) + x^5 = \frac{1}{5}x^5 - c + x^5 = \frac{6}{5}x^5 - c$

3. Trouver la solution générale de

$$y'(x) = \tan(x)\, y(x) + \frac{1}{\cos(x)} \quad , \text{ avec } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

[Ici $g(x) = \tan(x)$ et $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ continues sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$]

$$g(x) = \tan(x) \Rightarrow G(x) = \int \tan(x)\,dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = -\ln|\cos(x)|$$

$$\Rightarrow \boxed{G(x) = -\ln(\cos(x))} \quad , \text{ car } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\Rightarrow e^{G(x)} = e^{-\ln(\cos(x))} = e^{\ln(\cos(x))^{-1}} = (\cos(x))^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{G(x)} = \frac{1}{\cos(x)}}$$

$$f(x)e^{-G(x)} = \frac{1}{\cos(x)} \cdot \cos(x) = 1 \Rightarrow \gamma(x) = \int 1 \cdot dx = x$$

Solution générale: $y(x) = c\frac{1}{\cos(x)} + x\frac{1}{\cos(x)}$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{x+c}{\cos(x)}} \quad , \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

Vérification: $\left(\frac{x+c}{\cos(x)}\right)' = \frac{1 \cdot \cos(x) - (x+c)(-\sin(x))}{(\cos(x))^2}$

$$= \frac{1}{\cos(x)} + \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{x+c}{\cos(x)}$$

4. Trouver la solution de

$$y'(x) = \tan(x)\, y(x) + \frac{1}{\cos(x)} \quad , \text{ avec } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

qui satisfait la condition initiale $y(0) = 2$

On a : $2 = \frac{0+c}{\cos(0)} = \frac{c}{1} \Rightarrow c = 2$

Par conséquent, la solution cherchée est $\boxed{y(x) = \frac{x+2}{\cos(x)}}$

5. Même question avec la condition initiale $y(\frac{\pi}{3}) = 2$

On a : $2 = \frac{\frac{\pi}{3}+c}{\cos(\frac{\pi}{3})} = \frac{\frac{\pi}{3}+c}{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} = c + \frac{\pi}{3} \Rightarrow c = 1 - \frac{\pi}{3}$

Par conséquent, la solution cherchée est $\boxed{y(x) = \frac{x+1-\frac{\pi}{3}}{\cos(x)}}$

6. Trouver la solution générale de

$$y'(x) = y(x) + \sin(x).$$

$[$Ici $g(x)=1$ et $f(x)=\sin(x)]$

$g(x)=1 \Rightarrow \boxed{G(x)=x}$

$f(x)e^{-G(x)} = \sin(x)e^{-x} \Rightarrow \gamma(x) = \int \sin(x)e^{-x}dx$

$$\int \underset{\substack{\uparrow\\ -e^{-x}}}{e^{-x}} \underset{\substack{\downarrow\\ \cos(x)}}{\sin(x)}\,dx = -e^{-x}\sin(x) + \int \underset{\substack{\uparrow\\ -e^{-x}}}{e^{-x}} \underset{\substack{\downarrow\\ -\sin(x)}}{\cos(x)}\,dx$$

$$= -e^{-x}\sin(x) - e^{-x}\cos(x) - \int e^{-x}\sin(x)\,dx$$

$$\Rightarrow 2\int e^{-x}\sin(x)\,dx = -e^{-x}(\sin(x)+\cos(x))$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin(x)+\cos(x))}$$

Calcul alternatif :

Rappel: $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$, $\cos(x) = \mathrm{Re}(e^{ix})$, $\sin(x) = \mathrm{Im}(e^{ix})$

$$\int e^{-x}\sin(x)\,dx = \mathrm{Im}\left(\int e^{-x}e^{ix}dx\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(\int e^{(-1+i)x}dx\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{-1+i}e^{(-1+i)x}\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{-1+i}\,\frac{-1-i}{-1-i}\,e^{(-1+i)x}\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{2}(-1-i)\,e^{-x}(\cos(x)+i\sin(x))\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^{-x}(-\cos(x)-\sin(x))$$

Solution générale: $y(x) = ce^{x} + \left(-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos(x)+\sin(x))\right)e^{x}$

$\Rightarrow \boxed{y(x) = ce^{x} - \frac{1}{2}(\cos(x)+\sin(x))}$, avec $c \in \mathbb{R}$

Méthode des coefficients indéterminés.

Lorsque la fonction g est une constante : $g(x) = K$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

et la fonction f est

- soit un polynôme,
- soit une fonction exponentielle de la forme e^{ax}, avec $a \in \mathbb{R}$,
- soit une fonction trigonométrique de la forme $\sin(bx)$ ou $\cos(bx)$, avec $b \in \mathbb{R}$,
- soit un produit de ce type de fonctions,

alors il est possible de trouver une solution y_p de l'équation différentielle $y'(x) = K\, y(x) + f(x)$ qui a la même forme que f.

Exemples.

1. Trouver la solution générale de

$$y'(x) = 3\,y(x) + 2x$$

Ici $g(x) = 3$ est une fonction constante

et $f(x) = 2x$ est un polynôme de degré 1.

On cherche une solution y_p qui a la même forme que f :

$$\boxed{y_p(x) = ax + b},$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ sont des constantes à déterminer.

Comme $y_p'(x) = a$ et y_p est une solution, on a :

$$y_p'(x) = 3\,y_p(x) + 2x \iff a = 3(ax+b) + 2x$$

autrement dit, $\underbrace{(3a+2)}_{=0}x+\underbrace{(3b-a)}_{=0}=0$ pour tout x

On doit satisfaire :

$$\begin{cases} 3a+2=0 \\ 3b-a=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-\frac{2}{3} \\ b=\frac{a}{3}=-\frac{2}{9} \end{cases}$$

La solution cherchée est donc :

$$\boxed{y_p(x)=-\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}}$$

Comme $y_{hom}(x)=ce^{3x}$, avec $c\in\mathbb{R}$, la solution générale est

$$\boxed{y(x)=ce^{3x}-\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}} \text{ , avec } c\in\mathbb{R}$$

Vérification : $\left(ce^{3x}-\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}\right)'=3ce^{3x}-\frac{2}{3}$

$3\left(ce^{3x}-\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}\right)+2x=3ce^{3x}-2x-\frac{2}{3}+2x$

2. Reprenons l'équation différentielle $y'(x)=y(x)+\sin(x)$.

Ici $g(x)=1$ est une fonction constante

et $f(x)=\sin(x)=1\cdot\sin(x)+0\cdot\cos(x)$ [sin et cos vont ensemble]

On cherche une solution y_p qui a la même forme que f :

$$\boxed{y_p(x)=a\sin(x)+b\cos(x)}$$ où $a,b\in\mathbb{R}$ sont à déterminer.

Comme $y_p'(x)=a\cos(x)-b\sin(x)$ on doit satisfaire :

$$\underbrace{a\cos(x)-b\sin(x)}_{=y_p'(x)}=\Big(\underbrace{a\sin(x)+b\cos(x)}_{=y_p(x)}\Big)+\sin(x) \text{ pour tout } x$$

autrement dit, $\underbrace{(a+1+b)}_{=0}\sin(x)+\underbrace{(b-a)}_{=0}\cos(x)=0$

$$\begin{cases} a+1+b=0 \\ b-a=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b=-1 \\ -a+b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases} \text{ (comme avant)}$$

1.4. Equations différentielles homogènes.

Définition. Une équation différentielle d'ordre 1 est homogène si elle est de la forme :

$$\boxed{y'(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right)}$$

Pour résoudre une équation différentielle homogène, le changement de variables $\boxed{u(x) = \frac{y(x)}{x}}$ peut s'avérer utile :

On a $y(x) = x\,u(x)$ et $y'(x) = u(x) + x\,u'(x)$, d'où :

$$u(x) + x\,u'(x) = f(u(x)) \iff \boxed{u'(x) = \frac{1}{x}\left[f(u(x)) - u(x)\right]}$$

L'équation différentielle homogène est ainsi transformée en une équation séparable.

1.5. Equations différentielles de Bernoulli.

Définition. Une équation différentielle de premier ordre est une équation de Bernoulli si elle est de la forme suivante :

$$\boxed{y'(x) = g(x)\,y(x) + f(x)\,(y(x))^n} \quad (\text{avec } n \neq 0 \text{ et } n \neq 1)$$

Remarque historique.

En 1695, Jakob Bernoulli se donne beaucoup de peine pour résoudre cette équation et lance un concours officiel. Malheureusement pour lui, son frère Johann propose deux idées très élégantes pour résoudre "l'équation de mon Frère".

Remarque. Si $n>0$, alors $y(x)=0$ est une solution de
$$y'(x)=g(x)\,y(x)+f(x)\,(y(x))^n$$

Première idée. Utiliser le changement de variables
$$\boxed{z(x)=(y(x))^{1-n}}$$

On a :
$$\begin{aligned} z'(x) &= \left((y(x))^{1-n}\right)' = (1-n)(y(x))^{-n}\,y'(x) \\ &= (1-n)(y(x))^{-n}\left[g(x)\,y(x)+f(x)\,(y(x))^n\right] \\ &= (1-n)\,g(x)\,(y(x))^{1-n}+(1-n)\,f(x) \end{aligned}$$

autrement dit,
$$\boxed{z'(x)=(1-n)\,g(x)\,z(x)+(1-n)\,f(x)}$$

(équation différentielle linéaire inhomogène)

Deuxième idée. On cherche une solution de la forme
$$\boxed{y(x)=u(x)\,v(x)}$$
où u et v sont des fonctions à déterminer. On a :
$$y'(x)=u'(x)\,v(x)+u(x)\,v'(x)$$
d'où :
$$u'(x)\,v(x)+u(x)\,v'(x)=g(x)\,u(x)\,v(x)+f(x)\,(u(x)\,v(x))^n$$

Pour satisfaire cette équation, on peut égaler séparément les deux termes de chaque membre:

$$\boxed{\begin{cases} u'(x)=g(x)\,u(x) \\ v'(x)=f(x)\,(u(x))^{n-1}(v(x))^n \end{cases}}$$
(équation linéaire homogène pour u)
(équation séparable pour v)

Exemples.

Déterminer la solution générale des équations différentielles de Bernoulli suivantes :

1. $y'(x) = -y(x) - \sin(x)\left(y(x)\right)^2$ $\quad [n=2,\ g(x)=-1,\ f(x)=-\sin(x)]$

$y(x)=0$ est une solution de cette équation.

Nous avons : $1-n = 1-2 = -1$ et $\boxed{z(x) = \left(y(x)\right)^{-1} = \frac{1}{y(x)}}$

L'équation différentielle à résoudre est donc :

$$z'(x) = (1-n)\,g(x)\,z(x) + (1-n)\,f(x)$$

$$z'(x) = z(x) + \sin(x)$$

Nous avons vu que la solution de cette équation est :

$$z(x) = ce^{x} - \frac{1}{2}\left(\cos(x) + \sin(x)\right), \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

Par conséquent,

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{ce^{x} - \frac{1}{2}\left(\cos(x)+\sin(x)\right)}$$

La solution générale est donc :

$$\begin{cases} y(x) = 0 \\ y(x) = \dfrac{2}{Ke^{x} - \cos(x) - \sin(x)} \end{cases}, \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

2. $y'(x) = y(x) + x\sqrt{y(x)}$ $\qquad [n=\frac{1}{2},\ g(x)=1,\ f(x)=x]$

$y(x)=0$ est une solution de cette équation.

Nous avons : $1-n = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $\boxed{z(x) = (y(x))^{1/2} = \sqrt{y(x)}}$

L'équation différentielle à résoudre est donc:

$$z'(x) = (1-n)\,g(x)\,z(x) + (1-n)\,f(x)$$

$$z'(x) = \frac{1}{2}z(x) + \frac{1}{2}x$$

Nous avons $z_{hom}(x) = c\,e^{x/2}$ et $z_p(x) = ax+b$ tel que :

$$a = \frac{1}{2}(ax+b) + \frac{1}{2}x \iff \frac{1}{2}\underbrace{(a+1)}_{=0}x + \underbrace{\frac{1}{2}b - a}_{=0} = 0$$

$$\iff \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \end{cases}$$

d'où $z(x) = c\,e^{x/2} - x - 2$, avec $c \in \mathbb{R}$.

Par conséquent,

$$y(x) = (z(x))^2 = (c\,e^{x/2} - x - 2)^2$$

La solution générale est donc:

$$\begin{cases} y(x) = 0 \\ y(x) = (c\,e^{x/2} - x - 2)^2, \text{ avec } c \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

3. $y'(x) = -2\,y(x) + e^{5x}(y(x))^{-4}$ $[n=-4,\ g(x)=-2,\ f(x)=e^{5x}]$

$y(x)=0$ n'est pas une solution de cette équation.

Nous avons : $1-n=1-(-4)=5$ et $\boxed{z(x)=(y(x))^5}$

L'équation différentielle à résoudre est donc:

$$z'(x) = -10\,z(x) + 5e^{5x}$$

Nous avons $z_{hom}(x) = c\,e^{-10x}$ et $z_p(x) = a\,e^{5x}$ tel que :

$$5ae^{5x} = -10\,ae^{5x} + 5e^{5x} \iff 15a = 5 \iff a = \frac{1}{3}$$

d'où $z(x) = ce^{-10x} + \frac{1}{3}e^{5x}$, avec $c\in\mathbb{R}$

Par conséquent $y(x) = (z(x))^{1/5} = \sqrt[5]{ce^{-10x} + \frac{1}{3}e^{5x}}$, avec $c\in\mathbb{R}$

est la solution générale.

4. $y'(x) = 1\,y(x) + e^{5x}(y(x))^{-4}$ $[n=-4,\ g(x)=1,\ f(x)=e^{5x}]$

$y(x)=0$ n'est pas une solution de cette équation.

Nous avons : $1-n=1-(-4)=5$ et $\boxed{z(x)=(y(x))^5}$

L'équation différentielle à résoudre est donc:

$$z'(x) = (1-n)\,g(x)\,z(x) + (1-n)\,f(x)$$

$$z'(x) = 5\,z(x) + 5e^{5x}$$

Nous avons $z_{hom}(x) = c\,e^{5x}$ par conséquent, $z_p(x) = a\,e^{5x}$ n'est pas un bon choix de candidat de solution de l'équation différentielle inhomogène, car z_p est en fait solution de l'équation linéaire homogène associée.

Utilisons donc la méthode de variation de la constante:

Comme $\gamma'(x) = e^{-5x} \cdot 5e^{5x} = 5$, nous trouvons $\gamma(x) = 5x$

d'où $z_p(x) = 5xe^{5x}$ et $z(x) = ce^{5x} + 5xe^{5x}$, avec $c \in \mathbb{R}$

Par conséquent $y(x) = (z(x))^{1/5} = e^{x} \sqrt[5]{c+5x}$, avec $c \in \mathbb{R}$

5. Reprenons l'équation différentielle de l'exercice 10 de la série 2:

$$y'(x) = 4\,y(x) - 4\,(y(x))^2 \quad [n=2,\ g(x)=4,\ f(x)=-4]$$

$y(x)=0$ est une solution de cette équation.

Nous avons: $1-n = 1-2 = -1$ et $\boxed{z(x) = (y(x))^{-1} = \frac{1}{y(x)}}$

L'équation différentielle à résoudre est donc:

$$z'(x) = (1-n)\,g(x)\,z(x) + (1-n)\,f(x) = -4\,z(x) + 4$$

Ainsi, $z_{hom}(x) = ce^{-4x}$, $z_p(x) = 1$ et

$$z(x) = ce^{-4x} + 1, \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

d'où $y(x) = \frac{1}{1+ce^{-4x}}$, avec $c \in \mathbb{R}$ comme avant.

1.6. Equations différentielles d'ordre supérieur.

Equations différentielles linéaires d'ordre supérieur.

Définition. Une équation différentielle d'ordre n est dite **linéaire** si elle peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{y^{(n)}(x) + g_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + g_2(x)y''(x) + g_1(x)y'(x) + g_0(x)y(x) = f(x)}$$

où $g_0, g_1, g_2, \dots, g_{n-1}, f$ sont des fonctions d'une variable.

La fonction f est appelée terme inhomogène.

Si $f(x)=0$ pour tout x on dit que l'équation est homogène.

Sinon, on dit qu'elle est inhomogène.

Pour $n=1$, on a $y'(x) + g_0(x)y(x) = f(x) \iff y'(x) = \underbrace{-g_0(x)}_{=g(x)}y(x) + f(x)$

Rappel. (Algèbre linéaire)

Soient V, W des espaces vectoriels

On dit que $T: V \to W$ est une application linéaire si :

- $T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$ pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in V$
- $T(\lambda\vec{u}) = \lambda T(\vec{u})$ pour tout $\vec{u} \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

Le noyau de T : $\operatorname{Ker}(T) = \{\vec{v} \in V : T(\vec{v}) = \vec{0}\}$ est un sous-espace vectoriel de V.

Par contre, $\{\vec{v} \in V : T(\vec{v}) = \vec{w}$, avec $\vec{w} \neq \vec{0}\}$, n'est pas un sous-espace vectoriel de V.

Considérons maintenant l'application.

$$T : C^n(I) \longrightarrow C^0(I)$$
$$u \longmapsto u^{(n)} + g_{n-1} u^{(n-1)} + \ldots + g_2 u'' + g_1 u' + g_0 u$$

Comme la dérivation est linéaire :

$$(u+v)^{(k)} = u^{(k)} + v^{(k)} \quad \text{pour tout } u, v \in C^n(I) \text{ et } k \leq n,$$

l'application T est linéaire.

Par conséquent, l'équation différentielle linéaire

$$\boxed{y^{(n)}(x) + g_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) + \ldots + g_2(x) y''(x) + g_1(x) y'(x) + g_0(x) y(x) = f(x)}$$

peut s'écrire sous la forme compacte :

$$\boxed{T(y) = f}$$

l'équation différentielle linéaire homogène associée

$$\boxed{y^{(n)}(x) + g_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) + \ldots + g_2(x) y''(x) + g_1(x) y'(x) + g_0(x) y(x) = 0}$$

peut s'écrire sous la forme compacte :

$$\boxed{T(y) = 0}$$

Par conséquent, le noyau de T est formé des solutions de l'équation linéaire homogène. Autrement dit, $\mathrm{Ker}(T)$ est la solution générale de l'équation différentielle linéaire homogène.

Théorème.

La solution générale de l'équation différentielle linéaire homogène.

$$y^{(n)}(x)+g_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x)+\dots+g_2(x)y''(x)+g_1(x)y'(x)+g_0(x)y(x)=0$$

est un sous-espace vectoriel de $C^n(I)$ de dimension n.

Conséquence.

Pour trouver la solution générale d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n, il suffit de trouver n solutions linéairement indépendantes de l'équation.

Commençons par traiter un cas simple :

1.7. Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.

Définition. Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 est dite à coefficients constants si elle est de la forme

$$\boxed{y''(x)+by'(x)+cy(x)=f(x)} \qquad (I)$$

où f est une fonction d'une variable et $b,c\in\mathbb{R}$ sont des constantes réelles.

L'équation différentielle linéaire homogène associée est

$$\boxed{y''(x)+by'(x)+cy(x)=0} \qquad (H)$$

Rappel. Nous avons vu que la fonction $y(x)=e^{\lambda x}$ est une solution de l'équation différentielle linéaire homogène $y'(x)-\lambda y(x)=0$.

Idée. (Euler, 1739)

Cherchons une solution de $y''(x)+by'(x)+cy(x)=0$ de la forme $y(x)=e^{\lambda x}$, où le nombre $\lambda\in\mathbb{R}$ est à déterminer.

Comme $y'(x)=\lambda e^{\lambda x}$ et $y''(x)=\lambda^2 e^{\lambda x}$, nous avons:

$$\begin{aligned} y''(x)+by'(x)+cy(x) &= \lambda^2 e^{\lambda x}+b\lambda e^{\lambda x}+ce^{\lambda x} \\ &= e^{\lambda x}(\lambda^2+b\lambda+c) \end{aligned}$$

Comme $e^{\lambda x}>0$ nous avons ainsi

$$y''(x)+by'(x)+cy(x)=0 \iff \lambda^2+b\lambda+c=0$$

ce qui implique:

$$\left.\begin{array}{l} y(x)=e^{\lambda x} \text{ solution de} \\ y''(x)+by'(x)+cy(x)=0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} \lambda \text{ racine du polynôme} \\ p_c(\lambda)=\lambda^2+b\lambda+c \end{array}\right.$$

Définition. Le polynôme

$$\boxed{p_c(\lambda)=\lambda^2+b\lambda+c}$$

est le *polynôme caractéristique* associé à l'équation différentielle linéaire homogène

$$y''(x)+by'(x)+cy(x)=0$$

Rappel. Les racines du polynôme $p_c(\lambda)=\lambda^2+b\lambda+c$ sont

$$\lambda_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}$$

- Si $b^2-4c>0$ alors $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ et $\lambda_1\neq\lambda_2$
- Si $b^2-4c=0$ alors $\lambda_1=\lambda_2\in\mathbb{R}$
- Si $b^2-4c<0$ alors $\lambda_1,\lambda_2\notin\mathbb{R}$ et $\lambda_2=\overline{\lambda_1}$

De plus, comme

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)=\lambda^2-(\lambda_1+\lambda_2)\lambda+\lambda_1\lambda_2=p_c(\lambda)=\lambda^2+b\lambda+c$$

nous avons
$$\boxed{\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=-b\\ \lambda_1\lambda_2=c\end{cases}}$$

Théorème. Soient λ_1,λ_2 les racines du polynôme caractéristique associé à $y''(x)+b\,y'(x)+c\,y(x)=0$ (H)

1. Si $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, avec $\lambda_1\neq\lambda_2$, alors la solution générale de (H) est:
$$y(x)=c_1e^{\lambda_1x}+c_2e^{\lambda_2x}, \text{ avec } c_1,c_2\in\mathbb{R}$$
2. Si $\lambda_1=\lambda_2=\lambda\in\mathbb{R}$, alors la solution générale de (H) est:
$$y(x)=c_1e^{\lambda x}+c_2\,xe^{\lambda x}, \text{ avec } c_1,c_2\in\mathbb{R}$$
3. Si $\lambda_1,\lambda_2\notin\mathbb{R}$, alors $\lambda_1=\alpha+i\beta=\overline{\lambda_2}$, avec $\beta\neq0$ et la solution générale de (H) est:
$$y(x)=c_1e^{\alpha x}\cos(\beta x)+c_2e^{\alpha x}\sin(\beta x), \text{ avec } c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

Preuve.

1. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$: Comme λ_1, λ_2 sont des racines de P_c, les fonctions $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ et $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ sont des solutions de (H). Elles sont linéairement indépendantes

En effet, supposons que $c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

En prenant $x=0$ et $x=1$ nous obtenons le système

$$\begin{array}{l} x=0: \\ x=1: \end{array} \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\lambda_1} + c_2 e^{\lambda_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = -c_1 \\ c_1 \underbrace{(e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2})}_{\neq 0 \text{ si } \lambda_1 \neq \lambda_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

Par conséquent, la solution générale de (H) est dans ce cas

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$: Comme λ est une racine de P_c, la fonction $y_1(x) = e^{\lambda x}$ est une solution de (H). Comme $b = -(\lambda_1 + \lambda_2) = -2\lambda$ et $c = \lambda_1 \lambda_2 = \lambda^2$, l'équation (H) peut s'écrire dans ce cas :

$$y''(x) - 2\lambda y'(x) + \lambda^2 y(x) = 0 \qquad (*)$$

Vérifions que $y_2(x) = x e^{\lambda x}$ est aussi une solution de $(*)$;

Nous avons $y_2'(x) = e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x}$ et $y_2''(x) = \lambda e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} + \lambda^2 x e^{\lambda x}$

d'où $(\cancel{2\lambda e^{\lambda x}} + \cancel{\lambda^2 x e^{\lambda x}}) - 2\lambda(\cancel{e^{\lambda x}} + \cancel{\lambda x e^{\lambda x}}) + \cancel{\lambda^2 x e^{\lambda x}} = 0$

Les fonctions $y_1(x) = e^{\lambda x}$ et $y_2(x) = x e^{\lambda x}$ sont linéairement indépendantes [En effet, $c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x} = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda x}$ ...]

Par conséquent, la solution générale de (H) est dans ce cas

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}, \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

3. $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \alpha + i\beta = \overline{\lambda_2}$, $\beta \neq 0$: Comme λ_1, λ_2 sont des racines de P_c, les fonctions $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ et $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ sont des solutions complexes de (H). Etant donné que

$$\begin{cases} e^{\alpha x}\cos(\beta x) = e^{\alpha x}\frac{1}{2}(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) = \frac{1}{2}e^{\lambda_1 x} + \frac{1}{2}e^{\lambda_2 x} \\ e^{\alpha x}\sin(\beta x) = e^{\alpha x}\frac{1}{2i}(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) = \frac{1}{2i}e^{\lambda_1 x} - \frac{1}{2i}e^{\lambda_2 x} \end{cases}$$

sont des combinaisons linéaires de y_1 et y_2, elles sont aussi des solutions de (H) [un calcul explicite (long) est aussi possible]

Comme $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ et $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ sont linéairement indépendantes, la solution générale de (H) est dans ce cas

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x), \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

Exemples.

Trouver les solutions générales des équations différentielles suivantes :

1. $y''(x) - 25y(x) = 0$

   polynôme caractéristique : $P_c(\lambda) = \lambda^2 - 25 = (\lambda - 5)(\lambda + 5)$

   racines : $\lambda_1 = 5$ et $\lambda_2 = -5$

   solutions associées : $y_1(x) = e^{5x}$ et $y_2(x) = e^{-5x}$

   solution générale : $y(x) = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-5x}$, avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

2. $y''(x) - 10y'(x) + 25y(x) = 0$

polynôme caractéristique : $P_c(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda + 25 = (\lambda-5)^2$

racine double : $\lambda = 5$

solutions associées : $y_1(x) = e^{5x}$ et $y_2(x) = xe^{5x}$

solution générale : $y(x) = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x}$, avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

3. $y''(x) + 25y(x) = 0$

polynôme caractéristique : $P_c(\lambda) = \lambda^2 + 25 = (\lambda - 5i)(\lambda+5i)$

racines : $\lambda_1 = 5i = 0 + 5i$, $\lambda_2 = -5i = 0 - 5i$ $(\alpha = 0, \beta = 5)$

solutions associées : $y_1(x) = e^{0x}\cos(5x)$ et $y_2(x) = e^{0x}\sin(5x)$

solution générale : $y(x) = c_1 \cos(5x) + c_2 \sin(5x)$, avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

1.8. Equations différentielles linéaires d'ordre n à coefficients constants.

Définition. Une équation différentielle linéaire d'ordre n est dite à coefficients constants si elle est de la forme

$$\boxed{y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x)} \quad (I)$$

où f est une fonction d'une variable et $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sont des constantes réelles.

L'équation différentielle linéaire homogène associée est

$$\boxed{y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0} \quad (H)$$

Remarque. Pour alléger la notation, on écrira parfois :

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Définition. Le polynôme

$$P_c(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

est le polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle linéaire homogène

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \quad (H)$$

Remarque.

Nous avons le résultat important suivant:

$$\boxed{y(x) = e^{\lambda x} \text{ solution de } (H) \iff \lambda \text{ racine de } P_c}$$

Le théorème fondamental de l'algèbre nous permet de factoriser complètement P_c dans $\mathbb{C}$:

$$P_c(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\ldots(\lambda-\lambda_k)^{m_k}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ sont les racines de P_c de multiplicités $m_1, m_2, \ldots, m_k$ respectivement et

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n.$$

Nous avons vu que lorsque $\lambda \in \mathbb{R}$ est une racine double de $P_c(\lambda)=\lambda^2+b\lambda+c$, les fonctions $e^{\lambda x}$ et $xe^{\lambda x}$ sont des solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle $y''(x)+by'(x)+cy(x)=0$.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une racine de $P_c(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0$ de multiplicité m, alors on peut montrer que

$$1 \cdot e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ x^2e^{\lambda x},\ \ldots,\ x^{m-1}e^{\lambda x}$$

sont m solutions linéairement indépendantes de

$$y^{(n)}(x)+a_{n-1}y^{(n-1)}(x)+\ldots+a_2y''(x)+a_1y'(x)+a_0y(x)=0 \qquad (H)$$

Par conséquent, toute fonction de la forme $y(x)=p(x)e^{\lambda x}$, où p est un polynôme de degré $\leq m-1$, est une solution de (H).

De la même manière, si $\lambda=\alpha+i\beta$, avec $\beta\neq 0$, est une racine de P_c de multiplicité m, alors on peut montrer que $\alpha-i\beta$ est aussi une racine de P_c de multiplicité m et que

$$1\cdot e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ xe^{\alpha x}\cos(\beta x),\ x^2e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ \ldots,\ x^{m-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$
$$1\cdot e^{\alpha x}\sin(\beta x),\ xe^{\alpha x}\sin(\beta x),\ x^2e^{\alpha x}\sin(\beta x),\ \ldots,\ x^{m-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

sont $2m$ solutions linéairement indépendantes de (H).

Par conséquent, dans ce cas, toute fonction de la forme

$$y(x)=q_1(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)+q_2(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

où q_1 et q_2 sont des polynômes de degré $\leq m-1$ est une solution de (H).

Affirmation.

La solution générale de (H) est l'ensemble des combinaisons linéaires de toutes les solutions linéairement indépendantes associées aux racines du polynôme caractéristique P_c.

Méthode de résolution des équations différentielles linéaires homogènes d'ordre n à coefficients constants

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$$

- construire le polynôme caractéristique :

$$P_c(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$$

- trouver les racines de P_c
- établir la liste des solutions associées aux racines de P_c
- écrire la solution générale comme l'ensemble des combinaisons linéaires de ces solutions
- s'il y a des conditions initiales, fixer les constantes.

Difficulté: Trouver les racines de P_c, car il n'y a pas de méthode générale si $n \geq 3$.

Rappel: Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les racines de P_c :

$$P_c(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

nous avons $P_c(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n)$

$$= \lambda^n + \ldots + (-1)^n \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

Par conséquent, $\boxed{a_0 = (-1)^n \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n}$

et nous pouvons chercher des racines entières de P_c parmi les diviseurs de a_0.

Exemples.

Trouver la solution générale des équations différentielles suivantes:

1. $y''' - 13y'' + 12y' = 0$

Polynôme caractéristique:

$$P_c(\lambda) = \lambda^3 - 13\lambda^2 + 12\lambda = \lambda(\lambda^2 - 13\lambda + 12) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 12)$$

racines : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 12$ (multiplicité 1)

solutions associées:

$$y_1(x) = e^{0x} = 1 \,, \quad y_2(x) = e^{1x} = e^x \,, \quad y_3(x) = e^{12x}$$

solution générale:

$$y(x) = c_1 \cdot 1 + c_2 e^x + c_3 e^{12x}, \quad \text{avec } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

2. $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$

polynôme caractéristique:

$$P_c(\lambda) = \lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = (\lambda^2+4)^2 = (\lambda+2i)^2(\lambda-2i)^2$$

racines: $\lambda_1 = 2i = 0 + 2i$ (racines doubles) $\alpha = 0$

$\lambda_2 = -2i = 0 - 2i$ $\beta = 2$

solutions associées:

$$y_1(x) = e^{0x}\cos(2x) = \cos(2x), \quad y_3(x) = x e^{0x}\cos(2x) = x\cos(2x)$$

$$y_2(x) = e^{0x}\sin(2x) = \sin(2x), \quad y_4(x) = x e^{0x}\sin(2x) = x\sin(2x)$$

solution générale:

$$y(x) = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x) + c_3 x\cos(2x) + c_4 x\sin(2x)$$

$$= (c_1 + c_3 x)\cos(2x) + (c_2 + c_4 x)\sin(2x), \text{ avec } c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

3. $y''' + 5y'' + 8y' + 4y = 0$

Polynôme caractéristique:

$$P_c(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 8\lambda + 4$$

diviseurs de 4 : $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

Hörner:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 5 & 8 & 4 \\ -1 & & -1 & -4 & -4 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$P_c(1) = 1+5+8+4 \neq 0$

$P_c(-1) = -1+5-8+4 = 0$

$$P_c(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda^2+4\lambda+4) = (\lambda+1)(\lambda+2)^2$$

racines : $\lambda_1 = -1$ (multiplicité 1), $\lambda_2 = -2$ (multiplicité 2)

solutions associées: $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = e^{-2x}$, $y_3(x) = xe^{-2x}$

solution générale:

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + c_3 x e^{-2x}, \quad \text{avec } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Théorème.

La solution générale de l'équation différentielle linéaire inhomogène

$$y^{(n)}(x)+a_{n-1}y^{(n-1)}(x)+\dots+a_2y''(x)+a_1y'(x)+a_0y(x)=f(x) \quad (I)$$

s'écrit $\boxed{y(x)=y_{hom}(x)+y_p(x)}$

où y_{hom} est la solution générale de

$$y^{(n)}(x)+a_{n-1}y^{(n-1)}(x)+\dots+a_2y''(x)+a_1y'(x)+a_0y(x)=0 \quad (H)$$

et y_p est une solution de (I).

Preuve. La preuve est analogue à celle des équations linéaires d'ordre 1. Il faut considérer ici l'application linéaire

$$\begin{aligned} T: C^n(I) &\longrightarrow C^0(I) \\ y &\longmapsto y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_2y''+a_1y'+a_0 \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

Principe de superposition.

Si y_1 est une solution de $T(y)=f_1$:

$$y^{(n)}(x)+a_{n-1}y^{(n-1)}(x)+\dots+a_2y''(x)+a_1y'(x)+a_0y(x)=f_1(x)$$

et si y_2 est une solution de $T(y)=f_2$:

$$y^{(n)}(x)+a_{n-1}y^{(n-1)}(x)+\dots+a_2y''(x)+a_1y'(x)+a_0y(x)=f_2(x)$$

alors la somme (y_1+y_2) est une solution de $T(y)=f_1+f_2$:

$$y^{(n)}(x)+a_{n-1}y^{(n-1)}(x)+\dots+a_2y''(x)+a_1y'(x)+a_0y(x)=f_1(x)+f_2(x)$$

⚠ Si y_1 est une solution de

$$y^{(n)}(x)+a_{n-1}y^{(n-1)}(x)+\dots+a_2y''(x)+a_1y'(x)+a_0y(x)=f_1(x)$$

les multiples de y_1 ne sont pas des solutions de cette équation !

Question. Comment trouver une solution y_p de (I) ?

Réponse 1 : Méthode des coefficients indéterminés.

Rappels.

- Nous avons vu que les fonctions de la forme

$$\boxed{y(x) = p(x)e^{rx}}$$

où $r \in \mathbb{R}$ et p est un polynôme de degré $d \geq 0$, sont des solutions de toute équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants d'ordre n lorsque r est une racine de multiplicité $m > d$ du polynôme caractéristique associé.

- Nous avons aussi vu que les fonctions de la forme

$$\boxed{y(x) = q_1(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + q_2(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x)}$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et q_1 et q_2 sont des polynômes de degré $d \geq 0$, sont des solutions de toute équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants d'ordre n lorsque $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ sont des racines de multiplicité $m > d$ du polynôme caractéristique associé.

Considérons maintenant une équation différentielle linéaire inhomogène à coefficients constants donnée :

$$y^{(n)}(x)+a_{n-1}y^{(n-1)}(x)+\dots+a_2 y''(x)+a_1 y'(x)+a_0 y(x)=f(x) \quad (\mathrm{I})$$

Si le terme inhomogène $f(x)$ a l'une des formes suivantes :

$$p(x)e^{rx}, \qquad q_1(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x), \qquad q_2(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x),$$

alors il est possible de trouver une solution y_p de (I) qui a la même forme que f.

$f(x)=p(x)e^{rx}$, avec $r\in\mathbb{R}$ et p polynôme de degré d.

* si r n'est pas une racine de P_c, alors on pose

$$y_p(x)=q(x)e^{rx}$$

où q est un polynôme de même degré que p :

$$q(x)=q_d x^d+q_{d-1}x^{d-1}+\dots+q_2x^2+q_1x+q_0$$

où $q_0,q_1,\dots,q_d\in\mathbb{R}$ sont à déterminer.

* si r est une racine de P_c de multiplicité m, alors on pose

$$y_p(x)=x^m q(x)e^{rx}$$

où q est un polynôme de même degré que p :

$$q(x)=q_d x^d+q_{d-1}x^{d-1}+\dots+q_2x^2+q_1x+q_0$$

où $q_0,q_1,\dots,q_d\in\mathbb{R}$ sont à déterminer.

$f(x) = c_1 e^{ax}\cos(bx) + c_2 e^{ax}\sin(bx)$, avec $a, b, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

* si $a + ib$ n'est pas une racine de P_c, alors on pose

$$y_p(x) = Ae^{ax}\cos(bx) + Be^{ax}\sin(bx)$$

où $A, B \in \mathbb{R}$ sont à déterminer.

* si $a + ib$ est une racine de P_c de multiplicité m, alors on pose

$$y_p(x) = x^m\left(Ae^{ax}\cos(bx) + Be^{ax}\sin(bx)\right)$$

où $A, B \in \mathbb{R}$ sont à déterminer.

$f(x) = p_1(x)e^{ax}\cos(bx) + p_2(x)e^{ax}\sin(bx)$, avec $a, b \in \mathbb{R}$

et p_1, p_2 polynômes de degré d.

* si $a + ib$ n'est pas une racine de P_c, alors on pose

$$y_p(x) = q_1(x)e^{ax}\cos(bx) + q_2(x)e^{ax}\sin(bx)$$

où q_1, q_2 sont des polynômes de degré d à déterminer.

* si $a + ib$ est une racine de P_c de multiplicité m, alors on pose

$$y_p(x) = x^m\left(q_1(x)e^{ax}\cos(bx) + q_2(x)e^{ax}\sin(bx)\right)$$

où q_1, q_2 sont des polynômes de degré d à déterminer.

Terme inhomogène	Candidat
$f(x) = p(x)\, e^{rx}$ où $r \in \mathbb{R}$ et p polynôme de degré d	$y_p(x) = x^m q(x)\, e^{rx}$ où m : multiplicité de r en tant que racine de P_c ($m=0$ si $P_c(r) \neq 0$) et q polynôme de degré d à déterminer

Terme inhomogène	Candidat
$f(x) = p_1(x)\, e^{ax} \cos(bx) + p_2(x)\, e^{ax} \sin(bx)$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et p_1, p_2 polynômes de degré d	$y_p(x) = x^m q_1(x)\, e^{ax} \cos(bx) + x^m q_2(x)\, e^{ax} \sin(bx)$ où m : multiplicité de $a+ib$ en tant que racine de P_c ($m=0$ si $P_c(a+ib) \neq 0$) et q_1, q_2 polynômes de degré d à déterminer

Exemples.

Trouver la solution générale des équations différentielles suivantes :

1. $y''(x) - 4y(x) = e^{3x}$

Equation linéaire homogène associée : $y'' - 4y = 0$

Polynôme caractéristique : $P_c(\lambda) = \lambda^2 - 4 = (\lambda-2)(\lambda+2)$

racines : $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$ (toutes les deux de multiplicité 1)

solutions associées : $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = e^{-2x}$

solution homogène :

$$\boxed{y_{hom}(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} \text{, avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

terme inhomogène : $f(x) = 1 e^{3x}$

Ici $p(x) = 1$ (polynôme de degré 0) et $r = 3$

Comme $P_c(3) \neq 0$, on pose

$\boxed{y_p(x) = a e^{3x}}$, où $a \in \mathbb{R}$ est à déterminer,

On dérive : $y_p'(x) = 3a e^{3x} \Rightarrow y_p''(x) = 9a e^{3x}$

On remplace dans l'équation :

$$1 \cdot e^{3x} \overset{!}{=} y_p''(x) - 4y_p(x) = 9a e^{3x} - 4a e^{3x} = 5a e^{3x}$$

$\Rightarrow 5a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{5} \Rightarrow \boxed{y_p(x) = \frac{1}{5} e^{3x}}$

Solution générale :

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{5} e^{3x} \text{, avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2. $y''(x) - 4y(x) = 3e^{-2x}$

terme inhomogène : $f(x) = 3e^{-2x}$

Ici $p(x) = 3$ (polynôme de degré 0) et $r = -2$

Comme $r=-2$ est une racine de multiplicité $m=1$ de P_c, on pose

$\boxed{y_p(x) = axe^{-2x}}$, où $a \in \mathbb{R}$ est à déterminer,

On dérive : $y_p'(x) = ae^{-2x} - 2axe^{-2x} = ae^{-2x}(1-2x)$

$\Rightarrow y_p''(x) = -2ae^{-2x}(1-2x) - 2ae^{-2x} = -2ae^{-2x}(2-2x)$

On remplace dans l'équation :

$3e^{-2x} \overset{!}{=} y_p''(x) - 4y_p(x) = 4ae^{-2x}(x-1) - 4axe^{-2x} = -4ae^{-2x}$

$\Rightarrow -4a = 3 \Rightarrow a = -\frac{3}{4} \Rightarrow y_p(x) = -\frac{3}{4}xe^{-2x}$

Solution générale : $y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} - \frac{3}{4}xe^{-2x}$, avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

3. $y''(x) - 4y(x) = xe^{2x}$

terme inhomogène : $f(x) = xe^{2x}$

Ici $p(x) = x$ (polynôme de degré 1) et $r = 2$

Comme $r=2$ est une racine de multiplicité $m=1$ de P_c, on pose

$\boxed{y_p(x) = x(ax+b)e^{2x}}$, où $a, b \in \mathbb{R}$ sont à déterminer,

$\Rightarrow y_p(x) = (ax^2+bx)e^{2x}$

On dérive : $y_p'(x) = (2ax+b)e^{2x} + 2(ax^2+bx)e^{2x}$

$= e^{2x}(2ax^2 + 2ax + 2bx + b)$

$\Rightarrow y_p''(x) = 2e^{2x}(2ax^2+2ax+2bx+b) + e^{2x}(4ax+2a+2b)$

$= e^{2x}(4ax^2 + 8ax + 4bx + 2a + 4b)$

On remplace dans l'équation :

$$xe^{2x} \overset{!}{=} y_p''(x) - 4y_p(x)$$
$$= e^{2x}(4\cancel{ax^2} + 8ax + \cancel{4bx} + 2a + 4b) - 4(\cancel{ax^2} + \cancel{bx})e^{2x}$$
$$= 8axe^{2x} + (2a+4b)e^{2x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8a = 1 \\ 2a + 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{8} \\ b = -\frac{1}{16} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_p(x) = \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x\right)e^{2x}}$$

Solution générale :

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x\right)e^{2x}, \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

4. $y''(x) - 4y(x) = e^{3x} + 3e^{-2x} + xe^{2x}$

Par le principe de superposition, la solution générale est :

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{5}e^{3x} - \frac{3}{4}xe^{-2x} + \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x\right)e^{2x},$$

avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

5. $y''(x)+9y(x)=4\sin(3x)+3\cos(3x)$

Equation linéaire homogène associée : $y''+9y=0$

Polynôme caractéristique : $P_c(\lambda)=\lambda^2+9=(\lambda-3i)(\lambda+3i)$

racines : $\lambda_1=3i$, $\lambda_2=-3i$ (toutes les deux de multiplicité 1)

solutions associées : $y_1(x)=\cos(3x)$, $y_2(x)=\sin(3x)$

solution homogène :

$$\boxed{y_{hom}(x)=c_1\cos(3x)+c_2\sin(3x),\ \text{avec}\ c_1,c_2\in\mathbb{R}}$$

Comme $f(x)$ est une solution de l'équation homogène, on pose

$$\boxed{y_p(x)=x\left(a\cos(3x)+b\sin(3x)\right)}$$

où $a,b\in\mathbb{R}$ sont des constantes à déterminer. (Le facteur x tient compte du fait de la multiplicité de $\lambda_1=3i$ et $\lambda_2=-3i$)

On dérive :

$$y_p'(x)=(a\cos(3x)+b\sin(3x))+x(-3a\sin(3x)+3b\cos(3x))$$
$$=(3bx+a)\cos(3x)+(b-3ax)\sin(3x)$$

$$y_p''(x)=3b\cos(3x)-3(3bx+a)\sin(3x)$$
$$-3a\sin(3x)+3(b-3ax)\cos(3x)$$
$$=(6b-9ax)\cos(3x)+(-9bx-6a)\sin(3x)$$

On remplace dans l'équation :

$$4\sin(3x)+3\cos(3x)\overset{!}{=}y_p''(x)+9y_p(x)$$
$$=(6b-9ax)\cos(3x)+(-9bx-6a)\sin(3x)$$
$$+9x(a\cos(3x)+b\sin(3x))$$
$$=6b\cos(3x)-6a\sin(3x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -6a = 4 \\ 6b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_p(x) = -\frac{2}{3}x\cos(3x) + \frac{1}{2}x\sin(3x)}$$

Solution générale:

$$y(x) = c_1\cos(3x) + c_2\sin(3x) - \frac{2}{3}x\cos(3x) + \frac{1}{2}x\sin(3x)$$
$$= \left(c_1 - \frac{2}{3}x\right)\cos(3x) + \left(c_2 + \frac{1}{2}x\right)\sin(3x), \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

6. Considérer l'équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$y^{(12)}(x) + \dots = f(x)$$

et supposer que le polynôme caractéristique associé s'écrit :

$$P_c(\lambda) = (\lambda-3)^2(\lambda+2)^4(\lambda^2+25)^3$$

- si $f(x) = (5x^2-4)e^{-3x}$

  alors le candidat s'écrit $y_p(x) = (ax^2+bx+c)e^{-3x}$

  où $a,b,c \in \mathbb{R}$ sont à déterminer

- si $f(x) = (5x^2-4)e^{3x}$

  alors le candidat s'écrit $y_p(x) = (ax^2+bx+c)x^2e^{3x}$

  où $a,b,c \in \mathbb{R}$ sont à déterminer ($\lambda = 3$ est une racine de P_c de multiplicité 2)

- si $f(x) = (6x+7)e^{-2x}$

  alors le candidat s'écrit $y_p(x) = (ax+b)x^4 e^{-2x}$

  où $a, b \in \mathbb{R}$ sont à déterminer

  ($\lambda = -2$ est une racine de P_c de multiplicité 4)

- si $f(x) = (4x^3 - 5x)\cos(5x)$

  alors le candidat s'écrit

  $$y_p(x) = (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)x^3 \cos(5x) + (b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0)x^3 \sin(5x)$$

  où $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ sont à déterminer

  ($\lambda = 5i$ et $\lambda = -5i$ sont des racines de P_c de multiplicité 3)

Question. Comment résoudre

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x)$$

lorsque f n'est pas une solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants ?

Réponse. Méthode de la variation des constantes

On va illustrer la méthode dans le cas $n=2$.

Considérons donc l'équation différentielle linéaire inhomogène

$$y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = f(x) \qquad (I)$$

et l'équation différentielle linéaire homogène associée :

$$y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = 0 \qquad (H)$$

Soit

$$\boxed{y_{hom}(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \text{ , avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

la solution générale de (H). (obtenue à l'aide de $P_c(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c$)

Par construction, y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes.

Idée. On cherche une solution y_p de (I) de la forme

$$y_p(x) = c_1(x)\,y_1(x) + c_2(x)\,y_2(x)$$

où $c_1(x)$ et $c_2(x)$ sont des fonctions à déterminer.

Pour simplifier la notation, on va écrire :

$$y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

On dérive : $y_p' = c_1' y_1 + c_2' y_2 + c_1 y_1' + c_2 y_2'$

On pose

$$\boxed{c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0} \qquad (1)$$

pour que la forme de y_p' soit analogue à celle de y_p :

$$y_p' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$$

On dérive une nouvelle fois :

$$y_p'' = c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_1 y_1'' + c_2 y_2''$$

On remplace y_p, y_p' et y_p'' dans (I) :

$$\begin{aligned} f &= y_p'' + b y_p' + c y_p \\ &= (c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_1 y_1'' + c_2 y_2'') + b(c_1 y_1' + c_2 y_2') + c(c_1 y_1 + c_2 y_2) \\ &= c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_1 (y_1'' + b y_1' + c y_1) + c_2 (y_2'' + b y_2' + c y_2) \end{aligned}$$

Comme par hypothèse y_1 et y_2 sont solutions de (H), nous avons $y_1'' + b y_1' + c y_1 = 0$ et $y_2'' + b y_2' + c y_2 = 0$, d'où :

$$\boxed{f = c_1' y_1' + c_2' y_2'} \qquad (2)$$

Ainsi, pour trouver c_1 et c_2 nous devons résoudre le système :

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f \end{cases}$$

Utilisons la notation matricielle :

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

[Rappel. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$]

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} \begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} \begin{pmatrix} -y_2 f \\ y_1 f \end{pmatrix}$$

Définition.

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et soient $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables sur I. On définit le wronskien de y_1 et y_2 noté W (ou $W[y_1,y_2]$) comme la fonction

$$\boxed{W(x) = y_1(x)\, y_2'(x) - y_2(x)\, y_1'(x)}$$

Autrement dit,

$$\boxed{W(x) = \det\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}}$$

Remarque.

Nous avons l'équivalence :

y_1, y_2 linéairement indépendantes $\Leftrightarrow$ $W \neq 0$.

Nous avons donc:

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{W(x)} \begin{pmatrix} -y_2(x)\, f(x) \\ y_1(x)\, f(x) \end{pmatrix}$$

Par conséquent, la solution cherchée est

$$y_p(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x)$$

où

$$\boxed{\begin{aligned} c_1(x) &= -\int \frac{y_2(x)\, f(x)}{W(x)}\, dx \\ c_2(x) &= \int \frac{y_1(x)\, f(x)}{W(x)}\, dx \end{aligned}}$$

Exemple.

Trouver la solution générale de l'équation différentielle

$y''(x)+y(x)=\frac{1}{\cos(x)}$, avec $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

Équation linéaire homogène associée: $y''(x)+y(x)=0$

Polynôme caractéristique: $P_c(\lambda)=\lambda^2+1=(\lambda+i)(\lambda-i)$

Racines: $\lambda_1=i$, $\lambda_2=-i$

Solutions associées : $y_1(x)=\cos(x)$, $y_2(x)=\sin(x)$

Wronskien: $W(x)=y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)$

$$=\cos(x)\cos(x)-\sin(x)(-\sin(x))$$

$$\Rightarrow \boxed{W(x)=1}\neq 0$$

$$c_1(x)=-\int\frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}dx=-\int\frac{\sin(x)}{1}\frac{1}{\cos(x)}dx$$

$$=\ln|\cos(x)|=\ln(\cos(x)) \quad \text{, car } x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

$$c_2(x)=\int\frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}dx=\int\frac{\cos(x)}{1}\frac{1}{\cos(x)}dx=x$$

Par conséquent,

$$y_p(x)=c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{y_p(x)=\ln(\cos(x))\cos(x)+x\sin(x)}$$

Solution générale:

$$y(x)=c_1\cos(x)+c_2\sin(x)+\ln(\cos(x))\cos(x)+x\sin(x)$$

$$=(c_1+\ln(\cos(x)))\cos(x)+(c_2+x)\sin(x) \text{ , avec } c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

Remarque -

Contrairement à la méthode des coefficients indéterminés, la méthode de variation des constantes s'applique à des équations différentielles linéaires inhomogènes quelconques :

$$y''(x) + g(x)\, y'(x) + h(x)\, y(x) = f(x) \qquad (I)$$

où g et h sont des fonctions continues, à condition de connaître la solution générale de l'équation différentielle linéaire homogène associée :

$$y''(x) + g(x)\, y'(x) + h(x)\, y(x) = 0 \qquad (H)$$

à savoir, $\quad y_{hom}(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

où y_1, y_2 sont des solutions linéairement indépendantes de (H).

Exemple.

Considérons $\quad y''(x) - \frac{4}{x} y'(x) + \frac{6}{x^2} y(x) = 4x$, avec $x > 0$. (I)

1. Vérifier que $y_1(x) = x^2$ et $y_2(x) = x^3$ sont des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène associée.

2. Trouver une solution de (I)

1. $y_1(x) = x^2 \Rightarrow y_1'(x) = 2x \Rightarrow y_1''(x) = 2$

   d'où : $\quad 2 - \frac{4}{x} \cdot 2x + \frac{6}{x^2} \cdot x^2 = 2 - 8 + 6 = 0$:)

   $y_2(x) = x^3 \Rightarrow y_2'(x) = 3x^2 \Rightarrow y_2''(x) = 6x$

   d'où $\quad 6x - \frac{4}{x} \cdot 3x^2 + \frac{6}{x^2} \cdot x^3 = 6x - 12x + 6x = 0$:)

2. $W(x) = y_1(x) y_2'(x) - y_2(x) y_1'(x)$

$$= x^2 \cdot (3x^2) - x^3 (2x) = x^4 > 0$$

$$c_1(x) = -\int \frac{y_2(x)\, f(x)}{W(x)}\, dx = -\int \frac{x^3 \cdot 4x}{x^4}\, dx = -\int 4\, dx = -4x$$

$$c_2(x) = \int \frac{y_1(x)\, f(x)}{W(x)}\, dx = \int \frac{x^2 \cdot 4x}{x^4}\, dx = \int \frac{4}{x}\, dx$$

$$= 4\ln|x| = 4\ln(x) \quad , \text{ car } x > 0$$

$$\Rightarrow \quad y_p(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$$

$$= -4x \cdot x^2 + 4\ln(x) \cdot x^3$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y_p(x) = 4x^3 \ln(x) - 4x^3}$$

Solution générale:

$$y(x) = y_{hom}(x) + y_p(x) = c_1 x^2 + c_2 x^3 + 4x^3 \ln(x) - 4x^3$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^3 + 4x^3 \ln(x)} \quad , \text{avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(le terme $-4x^3$ peut être omis car il est déjà inclus dans y_{hom}).

La méthode se généralise à des équations différentielles linéaires inhomogènes d'ordre n:

$$y^{(n)}(x) + g_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) + \ldots + g_1(x) y'(x) + g_0(x) y(x) = f(x) \qquad (I)$$

Si $\quad y_{hom}(x) = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x) \quad$, avec $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$

est la solution générale de l'équation différentielle linéaire homogène associée, alors on cherche une solution de (I) de la forme

$$y_p(x) = c_1(x) y_1(x) + \ldots + c_n(x) y_n(x)$$

où $c_1(x), \ldots, c_n(x)$ sont des fonctions à déterminer.

Pour simplifier la notation, on va écrire :

$$y_p = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$$

On dérive : $y_p' = c_1' y_1 + \dots + c_n' y_n + c_1 y_1' + \dots + c_n y_n'$

On pose $c_1' y_1 + \dots + c_n' y_n = 0 \qquad (1)$

pour que la forme de y_p' soit analogue à celle de y_p :

$$y_p' = c_1 y_1' + \dots + c_n y_n'$$

On dérive : $y_p'' = c_1' y_1' + \dots + c_n' y_n' + c_1 y_1'' + \dots + c_n y_n''$

On pose $c_1' y_1' + \dots + c_n' y_n' = 0 \qquad (2)$

pour que la forme de y_p'' soit analogue à celle de y_p :

$$y_p'' = c_1 y_1'' + \dots + c_n y_n''$$

On dérive : $y_p''' = c_1' y_1'' + \dots + c_n' y_n'' + c_1 y_1''' + \dots + c_n y_n'''$

On pose $c_1' y_1'' + \dots + c_n' y_n'' = 0 \qquad (3)$

pour que la forme de y_p''' soit analogue à celle de y_p :

$$y_p''' = c_1 y_1''' + \dots + c_n y_n'''$$

On continue à dériver et à imposer des conditions sur $c_1', \dots, c_n'$:

$$c_1' y_1''' + \dots + c_n' y_n''' = 0 \qquad (4)$$

$$\vdots$$

$$c_1' y_1^{(n-2)} + \dots + c_n' y_n^{(n-2)} = 0 \qquad (n-1)$$

Lorsqu'on remplace $y_p, y_p', \dots, y_p^{(n)}$ dans (I) on obtient :

$$c_1' y_1^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)} = f \qquad (n)$$

Le système

$$\begin{cases} c_1' y_1 + \dots + c_n' y_n = 0 & (1) \\ c_1' y_1' + \dots + c_n' y_n' = 0 & (2) \\ \vdots & \\ c_1' y_1^{(n-2)} + \dots + c_n' y_n^{(n-2)} = 0 & (n-1) \\ c_1' y_1^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)} = f & (n) \end{cases}$$

peut être résolu :

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ \vdots \\ c_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix}$$

et on trouve $c_1(x), \dots, c_n(x)$ par intégration.

1.9. Equations différentielles de Cauchy-Euler.

Définition.

Une équation différentielle de deuxième ordre de la forme

$$x^2 y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = 0, \qquad (E)$$

avec $x>0$ et $b, c \in \mathbb{R}$, est appelée équation de Cauchy-Euler.

Idée. (Euler, 1769)

On cherche une solution de (E) de la forme $\boxed{y(x) = x^r}$,

où $r \in \mathbb{R}$ est un nombre à déterminer.

On a $y'(x) = r x^{r-1}$ et $y''(x) = r(r-1)x^{r-2}$, d'où :

$$x^2 r(r-1)x^{r-2} + bx r x^{r-1} + c x^r = x^r \left[r(r-1) + br + c \right]$$

Comme $x>0$, on a $x^r > 0$ ce qui implique :

$$\left.\begin{array}{l} y(x) = x^r \text{ solution de} \\ x^2 y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = 0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} r \text{ racine de} \\ r^2 + (b-1)r + c = 0 \end{array}\right.$$

<u>Théorème</u>. Soit

$$x^2 y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = 0, \text{ avec } x>0 \qquad (E)$$

Soient r_1, r_2 les solutions de l'équation $r^2 + (b-1)r + c = 0$.

1. Si $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, avec $r_1 \neq r_2$, alors la solution générale de (E) est
$$y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}, \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$
2. Si $r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$, alors la solution générale de (E) est :
$$y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_1} \ln(x), \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$
3. Si $r_1, r_2 \notin \mathbb{R}$, alors $r_1 = \alpha + i\beta = \overline{r_2}$, avec $\beta \neq 0$ et la solution générale de (E) est :
$$y(x) = c_1 x^{\alpha} \cos(\beta \ln(x)) + c_2 x^{\alpha} \sin(\beta \ln(x)), \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Exemple. Trouver la solution générale de

$$x^2 y''(x) - 4x y'(x) + 6\, y(x) = 0 \quad , \text{ avec } x > 0$$

Ici $b = -4$, $c = 6$, d'où :

$$r^2 + (b-1)r + c = r^2 - 5r + 6 = (r-2)(r-3)$$

$\Rightarrow$ les racines sont $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$

solutions associées : $y_1(x) = x^2$ et $y_2(x) = x^3$

solution générale :

$$\boxed{y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^3} \quad , \text{avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$