

Question. Comment résoudre

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x)$$

lorsque f n'est pas une solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants ?

Réponse. Méthode de la variation des constantes

On va illustrer la méthode dans le cas $n=2$.

Considérons donc l'équation différentielle linéaire inhomogène

$$y''(x) + b y'(x) + c y(x) = f(x) \quad (I)$$

et l'équation différentielle linéaire homogène associée :

$$y''(x) + b y'(x) + c y(x) = 0 \quad (H)$$

Soit

$$y_{\text{hom}}(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

la solution générale de (H). (obtenue à l'aide de $P_c(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c$)

Par construction, y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes.

Ideé. On cherche une solution y_p de (I) de la forme

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

où $c_1(x)$ et $c_2(x)$ sont des fonctions à déterminer.

Pour simplifier la notation, on va écrire :

$$y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$\text{On dérive : } y_p' = c_1' y_1 + c_2' y_2 + c_1 y_1' + c_2 y_2'$$

On pose

$$\boxed{c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0} \quad (1)$$

pour que la forme de y_p' soit analogue à celle de y_p :

$$y_p' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$$

On dérive une nouvelle fois:

$$y_p'' = c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_1 y_1'' + c_2 y_2''$$

On remplace y_p, y_p' et y_p'' dans (I):

$$\begin{aligned} f &= y_p'' + b y_p' + c y_p \\ &= (c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_1 y_1'' + c_2 y_2'') + b(c_1 y_1' + c_2 y_2') + c(c_1 y_1 + c_2 y_2) \\ &= c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_1 (y_1'' + b y_1' + c y_1) + c_2 (y_2'' + b y_2' + c y_2) \end{aligned}$$

Comme par hypothèse y_1 et y_2 sont solutions de (H), nous avons $y_1'' + b y_1' + c y_1 = 0$ et $y_2'' + b y_2' + c y_2 = 0$, d'où:

$$f = c_1' y_1' + c_2' y_2'$$

(2)

Ainsi, pour trouver c_1 et c_2 nous devons résoudre le système :

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f \end{cases}$$

Utilisons la notation matricielle :

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

$$\left[\text{Rappel. } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right]$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} \begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} \begin{pmatrix} -y_2 f \\ y_1 f \end{pmatrix}$$

Définition.

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et soient $y_1, y_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables sur I . On définit le **wronskien** de y_1 et y_2 noté W (ou $W[y_1, y_2]$) comme la fonction

$$W(x) = y_1(x) y_2'(x) - y_2(x) y_1'(x)$$

Autrement dit,

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}$$

Remarque.

Nous avons l'équivalence :

$$y_1, y_2 \text{ linéairement indépendantes} \Leftrightarrow W \neq 0.$$

Nous avons donc:

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{W(x)} \begin{pmatrix} -y_2(x) f(x) \\ y_1(x) f(x) \end{pmatrix}$$

Par conséquent, la solution cherchée est

$$y_p(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$$

où

$$c_1(x) = - \int \frac{y_2(x) f(x)}{W(x)} dx$$

$$c_2(x) = \int \frac{y_1(x) f(x)}{W(x)} dx$$

Exemple.

Trouver la solution générale de l'équation différentielle

$$y''(x) + y(x) = \frac{1}{\cos(x)}, \text{ avec } x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

Équation linéaire homogène associée: $y''(x) + y(x) = 0$

Polynôme caractéristique: $P_c(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda + i)(\lambda - i)$

Racines: $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$

Solutions associées: $y_1(x) = \cos(x), y_2(x) = \sin(x)$

Wronskien: $W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$

$$= \cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))$$

$$\Rightarrow \boxed{W(x) = 1} \neq 0$$

$$c_1(x) = - \int \frac{y_2(x) f(x)}{W(x)} dx = - \int \frac{\sin(x)}{1} \frac{1}{\cos(x)} dx$$

$$= \ln |\cos(x)| = \ln(\cos(x)) \quad , \text{ car } x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$c_2(x) = \int \frac{y_1(x) f(x)}{W(x)} dx = \int \frac{\cos(x)}{1} \frac{1}{\cos(x)} dx = x$$

Par conséquent,

$$y_p(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$$

$$\Rightarrow y_p(x) = \ln(\cos(x)) \cos(x) + x \sin(x)$$

Solution générale:

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + \ln(\cos(x)) \cos(x) + x \sin(x)$$

$$= (c_1 + \ln(\cos(x))) \cos(x) + (c_2 + x) \sin(x) \quad , \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Remarque -

Contrairement à la méthode des coefficients indéterminés, la méthode de variation des constantes s'applique à des équations différentielles linéaires inhomogènes quelconques :

$$y''(x) + g(x)y'(x) + h(x)y(x) = f(x) \quad (I)$$

où g et h sont des fonctions continues, à condition de connaître la solution générale de l'équation différentielle linéaire homogène associée :

$$y''(x) + g(x)y'(x) + h(x)y(x) = 0 \quad (H)$$

à savoir, $y_{\text{hom}}(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

où y_1, y_2 sont des solutions linéairement indépendantes de (H).

Exemple.

Considérons $y''(x) - \frac{4}{x} y'(x) + \frac{6}{x^2} y(x) = 4x$, avec $x > 0$. (I)

1. Vérifier que $y_1(x) = x^2$ et $y_2(x) = x^3$ sont des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène associée.

2. Trouver une solution de (I)

$$1. y_1(x) = x^2 \Rightarrow y_1'(x) = 2x \Rightarrow y_1''(x) = 2$$

$$\text{d'où : } 2 - \frac{4}{x} \cdot 2x + \frac{6}{x^2} \cdot x^2 = 2 - 8 + 6 = 0 \quad \text{!!}$$

$$y_2(x) = x^3 \Rightarrow y_2'(x) = 3x^2 \Rightarrow y_2''(x) = 6x$$

$$\text{d'où } 6x - \frac{4}{x} \cdot 3x^2 + \frac{6}{x^2} \cdot x^3 = 6x - 12x + 6x = 0 \quad \text{!!}$$

$$2. W(x) = y_1(x) y_2'(x) - y_2(x) y_1'(x)$$

$$= x^2 \cdot (3x^2) - x^3 (2x) = x^4 > 0$$

$$C_1(x) = - \int \frac{y_2(x) f(x)}{W(x)} dx = - \int \frac{x^3 \cdot 4x}{x^4} dx = - \int 4 dx = -4x$$

$$C_2(x) = \int \frac{y_1(x) f(x)}{W(x)} dx = \int \frac{x^2 \cdot 4x}{x^4} dx = \int \frac{4}{x} dx$$

$$= 4 \ln|x| = 4 \ln(x), \text{ car } x > 0$$

$$\Rightarrow y_p(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) \\ = -4x \cdot x^2 + 4 \ln(x) \cdot x^3$$

$$\Rightarrow \boxed{y_p(x) = 4x^3 \ln(x) - 4x^3}$$

Solution générale:

$$y(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_p(x) = c_1 x^2 + c_2 x^3 + 4x^3 \ln(x) - 4x^3$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^3 + 4x^3 \ln(x)} \text{ , avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(le terme $-4x^3$ peut être omis car il est déjà inclus dans y_{hom}).

La méthode se généralise à des équations différentielles linéaires inhomogènes d'ordre n :

$$y^{(n)}(x) + g_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + g_1(x)y'(x) + g_0(x)y(x) = f(x) \quad (I)$$

Si $y_{\text{hom}}(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$, avec $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$

est la solution générale de l'équation différentielle linéaire homogène associée, alors on cherche une solution de (I)

de la forme

$$y_p(x) = c_1(x) y_1(x) + \dots + c_n(x) y_n(x)$$

où $c_1(x), \dots, c_n(x)$ sont des fonctions à déterminer.

Pour simplifier la notation, on va écrire :

$$y_p = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$$

On dérive : $y_p' = c_1' y_1 + \dots + c_n' y_n + c_1 y_1' + \dots + c_n y_n'$

On pose $c_1' y_1 + \dots + c_n' y_n = 0$ (1)

pour que la forme de y_p' soit analogue à celle de y_p :

$$y_p' = c_1 y_1' + \dots + c_n y_n'$$

On dérive : $y_p'' = c_1' y_1' + \dots + c_n' y_n' + c_1 y_1'' + \dots + c_n y_n''$

On pose $c_1' y_1' + \dots + c_n' y_n' = 0$ (2)

pour que la forme de y_p'' soit analogue à celle de y_p :

$$y_p'' = c_1 y_1'' + \dots + c_n y_n''$$

On dérive : $y_p''' = c_1' y_1'' + \dots + c_n' y_n'' + c_1 y_1''' + \dots + c_n y_n'''$

On pose $c_1' y_1'' + \dots + c_n' y_n'' = 0$ (3)

pour que la forme de y_p''' soit analogue à celle de y_p :

$$y_p''' = c_1 y_1''' + \dots + c_n y_n'''$$

On continue à dériver et à imposer des conditions sur $c_1', \dots, c_n'$:

$$c_1' y_1''' + \dots + c_n' y_n''' = 0 \quad (4)$$

⋮

$$c_1' y_1^{(n-2)} + \dots + c_n' y_n^{(n-2)} = 0 \quad (n-1)$$

Lorsqu'on remplace $y_p, y_p', \dots, y_p^{(n)}$ dans (I) on obtient :

$$c_1' y_1^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)} = f \quad (n)$$

Le système

$$\begin{cases} c_1' y_1 + \dots + c_n' y_n = 0 & (1) \\ c_1' y_1' + \dots + c_n' y_n' = 0 & (2) \\ \vdots \\ c_1' y_1^{(n-2)} + \dots + c_n' y_n^{(n-2)} = 0 & (n-1) \\ c_1' y_1^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)} = f & (n) \end{cases}$$

peut être résolu :

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ \vdots \\ c_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix}$$

et on trouve $c_1(x), \dots, c_n(x)$ par intégration.

1.9. Equations différentielles de Cauchy-Euler.

Définition.

Une équation différentielle de deuxième ordre de la forme

$$x^2 y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = 0, \quad (E)$$

avec $x > 0$ et $b, c \in \mathbb{R}$, est appelée équation de Cauchy-Euler.

Ideé. (Euler, 1769)

On cherche une solution de (E) de la forme $y(x) = x^r$,

où $r \in \mathbb{R}$ est un nombre à déterminer.

On a $y'(x) = r x^{r-1}$ et $y''(x) = r(r-1) x^{r-2}$, d'où :

$$x^2 r(r-1) x^{r-2} + b x r x^{r-1} + c x^r = x^r [r(r-1) + br + c]$$

Comme $x > 0$, on a $x^r > 0$ ce qui implique :

$$\left. \begin{array}{l} y(x) = x^r \text{ solution de} \\ x^2 y''(x) + b x y'(x) + c y(x) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r \text{ racine de} \\ r^2 + (b-1)r + c = 0 \end{array} \right.$$

Théorème. Soit

$$x^2 y''(x) + b x y'(x) + c y(x) = 0, \text{ avec } x > 0 \quad (E)$$

Soient r_1, r_2 les solutions de l'équation $r^2 + (b-1)r + c = 0$.

1. Si $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, avec $r_1 \neq r_2$, alors la solution générale de (E) est

$$y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}, \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2. Si $r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$, alors la solution générale de (E) est:

$$y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_1} \ln(x), \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

3. Si $r_1, r_2 \notin \mathbb{R}$, alors $r_1 = \alpha + i\beta = \overline{r_2}$, avec $\beta \neq 0$ et la solution générale de (E) est:

$$y(x) = c_1 x^\alpha \cos(\beta \ln(x)) + c_2 x^\alpha \sin(\beta \ln(x)), \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Exemple. Trouver la solution générale de

$$x^2 y''(x) - 4x y'(x) + 6 y(x) = 0 \quad , \text{ avec } x > 0$$

Ici $b = -4$, $c = 6$, d'où :

$$r^2 + (b-1)r + c = r^2 - 5r + 6 = (r-2)(r-3)$$

$\Rightarrow$ les racines sont $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$

solutions associées: $y_1(x) = x^2$ et $y_2(x) = x^3$

solution générale :

$$y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^3 \quad , \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$