

Théorème.

La solution générale de l'équation différentielle linéaire inhomogène

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x) \quad (I)$$

s'écrit $y(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_p(x)$

où y_{hom} est la solution générale de

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \quad (H)$$

et y_p est une solution de (I).

Preuve. La preuve est analogue à celle des équations linéaires d'ordre 1. Il faut considérer ici l'application linéaire

$$T: C^n(I) \rightarrow C^0(I)$$

$$y \mapsto y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y$$



Principe de superposition.

Si y_1 est une solution de $T(y) = f_1$:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f_1(x)$$

et si y_2 est une solution de $T(y) = f_2$:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f_2(x)$$

alors la somme $(y_1 + y_2)$ est une solution de $T(y) = f_1 + f_2$:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

⚠ Si y_1 est une solution de

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f_1(x)$$

les multiples de y_1 ne sont pas des solutions de cette équation !

Question. Comment trouver une solution y_p de (I) ?

Réponse 1: Méthode des coefficients indéterminés.

Rappels.

- Nous avons vu que les fonctions de la forme

$$y(x) = p(x)e^{rx}$$

où $r \in \mathbb{R}$ et p est un polynôme de degré $d \geq 0$, sont des solutions de toute équation différentielle linéaire homogène

à coefficients constants d'ordre n lorsque r est une racine de multiplicité $m > d$ du polynôme caractéristique associé.

- Nous avons aussi vu que les fonctions de la forme

$$y(x) = q_1(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x) + q_2(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et q_1 et q_2 sont des polynômes de degré $d \geq 0$,

sont des solutions de toute équation différentielle linéaire

homogène à coefficients constants d'ordre n lorsque $\alpha + i\beta$

et $\alpha - i\beta$ sont des racines de multiplicité $m > d$ du polynôme

caractéristique associé.

Considérons maintenant une équation différentielle linéaire inhomogène à coefficients constants donnée :

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x) \quad (I)$$

Si le terme inhomogène $f(x)$ a l'une des formes suivantes :

$$p(x)e^{rx}, \quad q_1(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad q_2(x)e^{\alpha x} \sin(\beta x),$$

alors il est possible de trouver une solution y_p de (I) qui a la même forme que f .

$f(x) = p(x)e^{rx}$, avec $r \in \mathbb{R}$ et p polynôme de degré d .

* si r n'est pas une racine de P_C , alors on pose

$$y_p(x) = q(x)e^{rx}$$

où q est un polynôme de même degré que p :

$$q(x) = q_d x^d + q_{d-1} x^{d-1} + \dots + q_2 x^2 + q_1 x + q_0$$

où $q_0, q_1, \dots, q_d \in \mathbb{R}$ sont à déterminer.

* si r est une racine de P_C de multiplicité m , alors on pose

$$y_p(x) = x^m q(x)e^{rx}$$

où q est un polynôme de même degré que p :

$$q(x) = q_d x^d + q_{d-1} x^{d-1} + \dots + q_2 x^2 + q_1 x + q_0$$

où $q_0, q_1, \dots, q_d \in \mathbb{R}$ sont à déterminer.

$$f(x) = c_1 e^{ax} \cos(bx) + c_2 e^{ax} \sin(bx), \text{ avec } a, b, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

* si $a+ib$ n'est pas une racine de P_c , alors on pose

$$y_p(x) = A e^{ax} \cos(bx) + B e^{ax} \sin(bx)$$

où $A, B \in \mathbb{R}$ sont à déterminer.

* si $a+ib$ est une racine de P_c de multiplicité m , alors on pose

$$y_p(x) = x^m (A e^{ax} \cos(bx) + B e^{ax} \sin(bx))$$

où $A, B \in \mathbb{R}$ sont à déterminer.

$f(x) = p_1(x) e^{ax} \cos(bx) + p_2(x) e^{ax} \sin(bx)$, avec $a, b \in \mathbb{R}$
et p_1, p_2 polynômes de degré d .

* si $a+ib$ n'est pas une racine de P_C , alors on pose

$$y_p(x) = q_1(x) e^{ax} \cos(bx) + q_2(x) e^{ax} \sin(bx)$$

où q_1, q_2 sont des polynômes de degré d à déterminer.

* si $a+ib$ est une racine de P_C de multiplicité m , alors on pose

$$y_p(x) = x^m \left(q_1(x) e^{ax} \cos(bx) + q_2(x) e^{ax} \sin(bx) \right)$$

où q_1, q_2 sont des polynômes de degré d à déterminer.

Terme inhomogène

$$f(x) = p(x) e^{rx}$$

où $r \in \mathbb{R}$

et p polynôme de degré d

Candidat

$$y_p(x) = x^m q(x) e^{rx}$$

où m : multiplicité de r

en tant que racine de P_c
($m=0$ si $P_c(r) \neq 0$)

et q polynôme de degré d
à déterminer

Terme inhomogène

$$f(x) = p_1(x) e^{ax} \cos(bx) \\ + p_2(x) e^{ax} \sin(bx)$$

où $a, b \in \mathbb{R}$

et p_1, p_2 polynômes de degré d

Candidat

$$y_p(x) = x^m q_1(x) e^{ax} \cos(bx) \\ + x^m q_2(x) e^{ax} \sin(bx)$$

où m : multiplicité de $a+ib$

en tant que racine de P_c
($m=0$ si $P_c(a+ib) \neq 0$)

et q_1, q_2 polynômes de
degré d à déterminer

Exemples.

Trouver la solution générale des équations différentielles suivantes :

1. $y''(x) - 4y(x) = e^{3x}$

Equation linéaire homogène associée: $y'' - 4y = 0$

Polynôme caractéristique: $P_c(\lambda) = \lambda^2 - 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 2)$

racines : $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$ (toutes les deux de multiplicité 1)

solutions associées : $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = e^{-2x}$

solution homogène :

$$y_{\text{hom}}(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}, \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

terme inhomogène: $f(x) = 1e^{3x}$

Ici $p(x) = 1$ (polynôme de degré 0) et $r = 3$

Comme $P_c(3) \neq 0$, on pose

$$y_p(x) = ae^{3x}, \text{ où } a \in \mathbb{R} \text{ est à déterminer,}$$

$$\text{On dérive: } y_p'(x) = 3ae^{3x} \Rightarrow y_p''(x) = 9ae^{3x}$$

On remplace dans l'équation:

$$1e^{3x} = y_p''(x) - 4y_p(x) = 9ae^{3x} - 4ae^{3x} = 5ae^{3x}$$

$$\Rightarrow 5a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{5} \Rightarrow y_p(x) = \frac{1}{5}e^{3x}$$

Solution générale:

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{5}e^{3x}, \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$2. y''(x) - 4y(x) = 3e^{-2x}$$

terme inhomogène: $f(x) = 3e^{-2x}$

Ici $p(x) = 3$ (polynôme de degré 0) et $r = -2$

Comme $r = -2$ est une racine de multiplicité $m = 1$ de P_c , on pose

$$y_p(x) = axe^{-2x}, \text{ où } a \in \mathbb{R} \text{ est à déterminer,}$$

$$\text{On dérive: } y_p'(x) = ae^{-2x} - 2axe^{-2x} = ae^{-2x}(1 - 2x)$$

$$\Rightarrow y_p''(x) = -2ae^{-2x}(1 - 2x) - 2ae^{-2x} = -2ae^{-2x}(2 - 2x)$$

On remplace dans l'équation:

$$3e^{-2x} = y_p''(x) - 4y_p(x) = 4ae^{-2x}(x - 1) - 4axe^{-2x} = -4ae^{-2x}$$

$$\Rightarrow -4a = 3 \Rightarrow a = -\frac{3}{4} \Rightarrow y_p(x) = -\frac{3}{4}xe^{-2x}$$

Solution générale: $y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} - \frac{3}{4}xe^{-2x}$, avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$3. y''(x) - 4y(x) = xe^{2x}$$

terme inhomogène: $f(x) = xe^{2x}$

Ici $p(x) = x$ (polynôme de degré 1) et $r=2$

Comme $r=2$ est une racine de multiplicité $m=1$ de P_c , on pose

$$y_p(x) = x(ax+b)e^{2x}, \text{ où } a, b \in \mathbb{R} \text{ sont à déterminer,}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = (ax^2 + bx)e^{2x}$$

$$\begin{aligned} \text{On dérive : } y_p'(x) &= (2ax + b)e^{2x} + 2(ax^2 + bx)e^{2x} \\ &= e^{2x}(2ax^2 + 2ax + 2bx + b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_p''(x) &= 2e^{2x}(2ax^2 + 2ax + 2bx + b) + e^{2x}(4ax + 2a + 2b) \\ &= e^{2x}(4ax^2 + 8ax + 4bx + 2a + 4b) \end{aligned}$$

On remplace dans l'équation:

$$xe^{2x} \stackrel{!}{=} y_p''(x) - 4y_p(x)$$

$$= e^{2x}(\cancel{4ax^2} + 8ax + \cancel{4bx} + 2a + 4b) - 4(\cancel{ax^2} + \cancel{bx})e^{2x}$$

$$= 8ax e^{2x} + (2a + 4b)e^{2x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8a = 1 \\ 2a + 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{8} \\ b = -\frac{1}{16} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x \right) e^{2x}$$

Solution générale:

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x \right) e^{2x}, \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$4. \quad y''(x) - 4y(x) = e^{3x} + 3e^{-2x} + xe^{2x}$$

Par le principe de superposition, la solution générale est :

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{5} e^{3x} - \frac{3}{4} x e^{-2x} + \left(\frac{1}{8} x^2 - \frac{1}{16} x \right) e^{2x},$$

avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

5. $y''(x) + 9y(x) = 4 \sin(3x) + 3 \cos(3x)$

Equation linéaire homogène associée: $y'' + 9y = 0$

Polynôme caractéristique: $P_c(\lambda) = \lambda^2 + 9 = (\lambda - 3i)(\lambda + 3i)$

racines: $\lambda_1 = 3i$, $\lambda_2 = -3i$ (toutes les deux de multiplicité 1)

solutions associées: $y_1(x) = \cos(3x)$, $y_2(x) = \sin(3x)$

solution homogène:

$$y_{\text{hom}}(x) = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x), \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Comme $f(x)$ est une solution de l'équation homogène, on pose

$$y_p(x) = x (a \cos(3x) + b \sin(3x))$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ sont des constantes à déterminer. (Le facteur x tient compte du fait de la multiplicité de $\lambda_1 = 3i$ et $\lambda_2 = -3i$)

On dérive:

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= (a \cos(3x) + b \sin(3x)) + x(-3a \sin(3x) + 3b \cos(3x)) \\ &= (3bx + a) \cos(3x) + (b - 3ax) \sin(3x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p''(x) &= 3b \cos(3x) - 3(3bx + a) \sin(3x) \\ &\quad - 3a \sin(3x) + 3(b - 3ax) \cos(3x) \\ &= (6b - 9ax) \cos(3x) + (-9bx - 6a) \sin(3x) \end{aligned}$$

On remplace dans l'équation:

$$\begin{aligned} 4 \sin(3x) + 3 \cos(3x) &= y_p''(x) + 9 y_p(x) \\ &= (6b - 9ax) \cos(3x) + (-9bx - 6a) \sin(3x) \\ &\quad + 9x(a \cos(3x) + b \sin(3x)) \\ &= 6b \cos(3x) - 6a \sin(3x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -6a = 4 \\ 6b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = -\frac{2}{3}x \cos(3x) + \frac{1}{2}x \sin(3x)$$

Solution générale:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x) - \frac{2}{3}x \cos(3x) + \frac{1}{2}x \sin(3x) \\ &= \left(c_1 - \frac{2}{3}x\right) \cos(3x) + \left(c_2 + \frac{1}{2}x\right) \sin(3x), \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

6. Considérer l'équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$y^{(12)}(x) + \dots = f(x)$$

et supposer que le polynôme caractéristique associé s'écrit :

$$P_c(\lambda) = (\lambda - 3)^2 (\lambda + 2)^4 (\lambda^2 + 25)^3$$

- si $f(x) = (5x^2 - 4)e^{-3x}$

alors le candidat s'écrit $y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-3x}$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont à déterminer

- si $f(x) = (5x^2 - 4)e^{3x}$

alors le candidat s'écrit $y_p(x) = (ax^2 + bx + c)x^2 e^{3x}$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont à déterminer ($\lambda = 3$ est une racine de P_c de multiplicité 2)

- si $f(x) = (6x + 7)e^{-2x}$

alors le candidat s'écrit $y_p(x) = (ax + b)x^4 e^{-2x}$

où $a, b \in \mathbb{R}$ sont à déterminer

($\lambda = -2$ est une racine de P_c de multiplicité 4)

- si $f(x) = (4x^3 - 5x) \cos(5x)$

alors le candidat s'écrit

$$y_p(x) = (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)x^3 \cos(5x) \\ + (b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0)x^3 \sin(5x)$$

où $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ sont à déterminer

($\lambda = 5i$ et $\lambda = -5i$ sont des racines de P_c de multiplicité 3)