

Preuve.

1. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$: Comme λ_1, λ_2 sont des racines de P_c ,

les fonctions $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ et $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ sont des solutions

de (H). Elles sont linéairement indépendantes

En effet, supposons que $c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

En prenant $x=0$ et $x=1$ nous obtenons le système

$$\begin{array}{l} x=0: \\ x=1: \end{array} \left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\lambda_1} + c_2 e^{\lambda_2} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_2 = -c_1 \\ c_1 (e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{array} \right.$$

$\neq 0$ si $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Par conséquent, la solution générale de (H) est dans ce cas

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$: Comme λ est une racine de P_c , la fonction $y_1(x) = e^{\lambda x}$ est une solution de (H). Comme $b = -(\lambda_1 + \lambda_2) = -2\lambda$ et $c = \lambda_1 \lambda_2 = \lambda^2$, l'équation (H) peut s'écrire dans ce cas:

$$y''(x) - 2\lambda y'(x) + \lambda^2 y(x) = 0 \quad (*)$$

Vérifions que $y_2(x) = x e^{\lambda x}$ est aussi une solution de (*):

Nous avons $y_2'(x) = e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x}$ et $y_2''(x) = \lambda e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} + \lambda^2 x e^{\lambda x}$

$$\text{d'où } (2\lambda x e^{\lambda x} + \lambda^2 x e^{\lambda x}) - 2\lambda (e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x}) + \lambda^2 x e^{\lambda x} = 0$$

Les fonctions $y_1(x) = e^{\lambda x}$ et $y_2(x) = x e^{\lambda x}$ sont linéairement indépendantes [En effet, $c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x} = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda x} \dots$]

Par conséquent, la solution générale de (H) est dans ce cas

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}, \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

3. $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \alpha + i\beta = \overline{\lambda_2}$, $\beta \neq 0$: Comme λ_1, λ_2 sont des racines de P_c , les fonctions $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ et $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ sont des solutions complexes de (H). Etant donné que

$$\begin{cases} e^{\alpha x} \cos(\beta x) = e^{\alpha x} \frac{1}{2} (e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) = \frac{1}{2} e^{\lambda_1 x} + \frac{1}{2} e^{\lambda_2 x} \\ e^{\alpha x} \sin(\beta x) = e^{\alpha x} \frac{1}{2i} (e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) = \frac{1}{2i} e^{\lambda_1 x} - \frac{1}{2i} e^{\lambda_2 x} \end{cases}$$

sont des combinaisons linéaires de y_1 et y_2 , elles sont aussi des solutions de (H) [un calcul explicite (long) est aussi possible]

Comme $e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ et $e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ sont linéairement indépendantes, la solution générale de (H) est dans ce cas

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x), \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

Exemples.

Trouver les solutions générales des équations différentielles suivantes :

1. $y''(x) - 25y(x) = 0$

polynôme caractéristique : $P_c(\lambda) = \lambda^2 - 25 = (\lambda - 5)(\lambda + 5)$

racines : $\lambda_1 = 5$ et $\lambda_2 = -5$

solutions associées : $y_1(x) = e^{5x}$ et $y_2(x) = e^{-5x}$

solution générale : $y(x) = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-5x}$, avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

2. $y''(x) - 10y'(x) + 25y(x) = 0$

polynôme caractéristique: $P_c(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda + 25 = (\lambda - 5)^2$

racine double: $\lambda = 5$

solutions associées: $y_1(x) = e^{5x}$ et $y_2(x) = x e^{5x}$

solution générale: $y(x) = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x}$, avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

3. $y''(x) + 25y(x) = 0$

polynôme caractéristique: $P_c(\lambda) = \lambda^2 + 25 = (\lambda - 5i)(\lambda + 5i)$

racines: $\lambda_1 = 5i = 0 + 5i$, $\lambda_2 = -5i = 0 - 5i$ ($\alpha = 0$, $\beta = 5$)

solutions associées: $y_1(x) = e^{0x} \cos(5x)$ et $y_2(x) = e^{0x} \sin(5x)$

solution générale: $y(x) = c_1 \cos(5x) + c_2 \sin(5x)$, avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

1.8. Equations différentielles linéaires d'ordre n à coefficients constants.

Définition. Une équation différentielle linéaire d'ordre n est dite à coefficients constants si elle est de la forme

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x) \quad (I)$$

où f est une fonction d'une variable et $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ sont des constantes réelles.

L'équation différentielle linéaire homogène associée est

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \quad (H)$$

Remarque. Pour alléger la notation, on écrira parfois:

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Définition. Le polynôme

$$P_c(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

est le polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle linéaire homogène

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_2y''(x) + a_1y'(x) + a_0y(x) = 0 \quad (H)$$

Remarque.

Nous avons le résultat important suivant:

$$y(x) = e^{\lambda x} \text{ solution de } (H) \Leftrightarrow \lambda \text{ racine de } P_c$$

Le théorème fondamental de l'algèbre nous permet de factoriser complètement P_c dans $\mathbb{C}$:

$$P_c(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ sont les racines de P_c de multiplicités $m_1, m_2, \dots, m_k$ respectivement et

$$m_1 + m_2 + \dots + m_k = n.$$

Nous avons vu que lorsque $\lambda \in \mathbb{R}$ est une racine double de $P_c(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c$, les fonctions $e^{\lambda x}$ et $x e^{\lambda x}$ sont des solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle $y''(x) + b y'(x) + c y(x) = 0$.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une racine de $P_c(\lambda) = \lambda^2 + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ de multiplicité m , alors on peut montrer que

$$1 \cdot e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, \dots, x^{m-1} e^{\lambda x}$$

sont m solutions linéairement indépendantes de

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \quad (H)$$

Par conséquent, toute fonction de la forme $y(x) = p(x) e^{\lambda x}$, où p est un polynôme de degré $\leq m-1$, est une solution de (H).

De la même manière, si $\lambda = \alpha + i\beta$, avec $\beta \neq 0$, est une racine de P_c de multiplicité m , alors on peut montrer que $\alpha - i\beta$ est aussi une racine de P_c de multiplicité m et que

$$1. e^{\alpha x} \cos(\beta x), x e^{\alpha x} \cos(\beta x), x^2 e^{\alpha x} \cos(\beta x), \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

$$1. e^{\alpha x} \sin(\beta x), x e^{\alpha x} \sin(\beta x), x^2 e^{\alpha x} \sin(\beta x), \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

sont $2m$ solutions linéairement indépendantes de (H).

Par conséquent, dans ce cas, toute fonction de la forme

$$y(x) = q_1(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x) + q_2(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

où q_1 et q_2 sont des polynômes de degré $\leq m-1$ est une solution de (H).

Affirmation.

La solution générale de (H) est l'ensemble des combinaisons linéaires de toutes les solutions linéairement indépendantes associées aux racines du polynôme caractéristique P_c .

Méthode de résolution des équations différentielles linéaires homogènes d'ordre n à coefficients constants

$$\underline{y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0}$$

- construire le polynôme caractéristique :

$$P_c(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

- trouver les racines de P_c
- établir la liste des solutions associées aux racines de P_c
- écrire la solution générale comme l'ensemble des combinaisons linéaires de ces solutions
- s'il y a des conditions initiales, fixer les constantes.

Difficulté: Trouver les racines de P_c , car il n'y a pas de méthode générale si $n \geq 3$.

Rappel: Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les racines de P_c :

$$P_c(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

$$\begin{aligned} \text{nous avons } P_c(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) \\ &= \lambda^n + \dots + (-1)^n \lambda_1 \cdot \lambda_2 \dots \lambda_n \end{aligned}$$

Par conséquent, $a_0 = (-1)^n \lambda_1 \cdot \lambda_2 \dots \lambda_n$

et nous pouvons chercher des racines entières de P_c parmi les diviseurs de a_0 .

Exemples.

Trouver la solution générale des équations différentielles suivantes :

1. $y''' - 13y'' + 12y' = 0$

Polynôme caractéristique :

$$P_c(\lambda) = \lambda^3 - 13\lambda^2 + 12\lambda = \lambda(\lambda^2 - 13\lambda + 12) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 12)$$

racines : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 12$ (multiplicité 1)

solutions associées :

$$y_1(x) = e^{0x} = 1 , \quad y_2(x) = e^{1x} = e^x , \quad y_3(x) = e^{12x}$$

solution générale :

$$y(x) = c_1 \cdot 1 + c_2 e^x + c_3 e^{12x} , \quad \text{avec } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

$$2. \ y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$$

polynôme caractéristique:

$$p_c(\lambda) = \lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = (\lambda^2 + 4)^2 = (\lambda + 2i)^2(\lambda - 2i)^2$$

$$\text{racines: } \lambda_1 = 2i = 0 + 2i$$

$$\lambda_2 = -2i = 0 - 2i$$

(racines doubles)

$$\alpha = 0$$

$$\beta = 2$$

solutions associées:

$$y_1(x) = e^{0x} \cos(2x) = \cos(2x), \quad y_3(x) = x e^{0x} \cos(2x) = x \cos(2x)$$

$$y_2(x) = e^{0x} \sin(2x) = \sin(2x), \quad y_4(x) = x e^{0x} \sin(2x) = x \sin(2x)$$

solution générale:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + c_3 x \cos(2x) + c_4 x \sin(2x) \\ &= (c_1 + c_3 x) \cos(2x) + (c_2 + c_4 x) \sin(2x), \text{ avec } c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$3. \ y''' + 5y'' + 8y' + 4y = 0$$

Polynôme caractéristique :

$$p_c(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 8\lambda + 4$$

diviseurs de 4 : $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

$$p_c(1) = 1 + 5 + 8 + 4 \neq 0 \quad \text{!}$$

$$p_c(-1) = -1 + 5 - 8 + 4 = 0 \quad \text{!}$$

$$p_c(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 4) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)^2$$

racines : $\lambda_1 = -1$ (multiplicité 1), $\lambda_2 = -2$ (multiplicité 2)

solutions associées : $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = e^{-2x}$, $y_3(x) = xe^{-2x}$

solution générale :

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + c_3 x e^{-2x}, \quad \text{avec } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Hörner:

-1	1	5	8	4
	-1	-4	-4	
	1	4	4	0