

1.5. Equations différentielles de Bernoulli.

Définition. Une équation différentielle de premier ordre est une équation de Bernoulli si elle est de la forme suivante:

$$y'(x) = g(x)y(x) + f(x)(y(x))^n \quad (\text{avec } n \neq 0 \text{ et } n \neq 1)$$

Remarque historique.

En 1695, Jakob Bernoulli se donne beaucoup de peine pour résoudre cette équation et lance un concours officiel.

Malheureusement pour lui, son frère Johann propose deux idées très élégantes pour résoudre "l'équation de mon Frère".

Remarque. Si $n > 0$, alors $y(x) = 0$ est une solution de

$$y'(x) = g(x)y(x) + f(x)(y(x))^n$$

Première idée. Utiliser le changement de variables

$$z(x) = (y(x))^{1-n}$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } z'(x) &= ((y(x))^{1-n})' = (1-n)(y(x))^{-n} y'(x) \\ &= (1-n)(y(x))^{-n} [g(x)y(x) + f(x)(y(x))^n] \\ &= (1-n)g(x)(y(x))^{1-n} + (1-n)f(x) \end{aligned}$$

autrement dit,

$$z'(x) = (1-n)g(x)z(x) + (1-n)f(x)$$

(équation différentielle linéaire inhomogène)

Deuxième idée. On cherche une solution de la forme

$$y(x) = u(x) v(x)$$

où u et v sont des fonctions à déterminer. On a :

$$y'(x) = u'(x) v(x) + u(x) v'(x)$$

d'où :

$$\underbrace{u'(x) v(x) + u(x) v'(x)}_{=} = \underbrace{g(x) u(x) v(x) + f(x) (u(x) v(x))^n}_{=}$$

Pour satisfaire cette équation, on peut évaluer séparément les deux termes de chaque membre :

$$\begin{cases} u'(x) = g(x) u(x) \\ v'(x) = f(x) (u(x))^{n-1} (v(x))^n \end{cases}$$

(équation linéaire homogène pour u)

(équation séparable pour v)

Exemples.

Déterminer la solution générale des équations différentielles de Bernoulli suivantes:

1. $y'(x) = -y(x) - \sin(x)(y(x))^2$ $[n=2, g(x)=-1, f(x)=-\sin(x)]$

$y(x)=0$ est une solution de cette équation.

Nous avons: $1-n=1-2=-1$ et $z(x) = (y(x))^{-1} = \frac{1}{y(x)}$

L'équation différentielle à résoudre est donc:

$$z'(x) = (1-n)g(x)z(x) + (1-n)f(x)$$

$$z'(x) = z(x) + \sin(x)$$

Nous avons vu que la solution de cette équation est :

$$z(x) = ce^x - \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x)) , \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

Par conséquent,

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{ce^x - \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x))}$$

La solution générale est donc :

$$\begin{cases} y(x) = 0 \\ y(x) = \frac{2}{ke^x - \cos(x) - \sin(x)} , \text{ avec } k \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$2. \quad y'(x) = y(x) + x \sqrt{y(x)} \quad \left[n = \frac{1}{2}, g(x) = 1, f(x) = x \right]$$

$y(x) = 0$ est une solution de cette équation.

Nous avons: $1-n = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $z(x) = (y(x))^{1/2} = \sqrt{y(x)}$

L'équation différentielle à résoudre est donc:

$$z'(x) = (1-n) g(x) z(x) + (1-n) f(x)$$

$$z'(x) = \frac{1}{2} z(x) + \frac{1}{2} x$$

Nous avons $z_{\text{hom}}(x) = c e^{x/2}$ et $z_p(x) = ax + b$ tel que:

$$a = \frac{1}{2}(ax+b) + \frac{1}{2}x \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{2}(a+1)}_{=0} x + \underbrace{\frac{1}{2}b - a}_{=0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$$

d'où $z(x) = c e^{x/2} - x - 2$, avec $c \in \mathbb{R}$,

Par conséquent,

$$y(x) = (z(x))^2 = (ce^{x/2} - x - 2)^2$$

La solution générale est donc :

$$\begin{cases} y(x) = 0 \\ y(x) = (ce^{x/2} - x - 2)^2, \text{ avec } c \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$3. y'(x) = -2y(x) + e^{5x} (y(x))^{-4} \quad [n = -4, g(x) = -2, f(x) = e^{5x}]$$

$y(x) = 0$ n'est pas une solution de cette équation.

Nous avons: $1 - n = 1 - (-4) = 5$ et $z(x) = (y(x))^5$

L'équation différentielle à résoudre est donc:

$$z'(x) = -10z(x) + 5e^{5x}$$

Nous avons $z_{\text{hom}}(x) = ce^{-10x}$ et $z_p(x) = ae^{5x}$ tel que:

$$5ae^{5x} = -10ae^{5x} + 5e^{5x} \Leftrightarrow 15a = 5 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$$

d'où $z(x) = ce^{-10x} + \frac{1}{3}e^{5x}$, avec $c \in \mathbb{R}$

Par conséquent $y(x) = (z(x))^{1/5} = \sqrt[5]{ce^{-10x} + \frac{1}{3}e^{5x}}$, avec $c \in \mathbb{R}$
est la solution générale.

$$4. y'(x) = 1 y(x) + e^{5x} (y(x))^{-4} \quad [n = -4, g(x) = 1, f(x) = e^{5x}]$$

$y(x) = 0$ n'est pas une solution de cette équation.

Nous avons: $1 - n = 1 - (-4) = 5$ et $z(x) = (y(x))^5$

L'équation différentielle à résoudre est donc:

$$z'(x) = (1 - n) g(x) z(x) + (1 - n) f(x)$$

$$z'(x) = 5 z(x) + 5 e^{5x}$$

Nous avons $z_{\text{hom}}(x) = c e^{5x}$ par conséquent, $z_p(x) = a e^{5x}$

n'est pas un bon choix de candidat de solution de l'équation différentielle inhomogène, car z_p est en fait solution de l'équation linéaire homogène associée.

Utilisons donc la méthode de variation de la constante:

Comme $\gamma'(x) = e^{-5x} \cdot 5e^{5x} = 5$, nous trouvons $\gamma(x) = 5x$

d'où $z_p(x) = 5xe^{5x}$ et $z(x) = ce^{5x} + 5xe^{5x}$, avec $c \in \mathbb{R}$

Par conséquent $y(x) = (z(x))^{1/5} = e^x \sqrt[5]{c+5x}$, avec $c \in \mathbb{R}$

5. Reprenons l'équation différentielle de l'exercice 10 de la série 2 :

$$y'(x) = 4y(x) - 4(y(x))^2 \quad [n=2, g(x)=4, f(x)=-4]$$

$y(x)=0$ est une solution de cette équation.

Nous avons : $1-n=1-2=-1$ et $z(x) = (y(x))^{-1} = \frac{1}{y(x)}$

L'équation différentielle à résoudre est donc :

$$z'(x) = (1-n)g(x)z(x) + (1-n)f(x) = -4z(x) + 4$$

Ainsi, $z_{\text{hom}}(x) = ce^{-4x}$, $z_p(x) = 1$ et

$$z(x) = ce^{-4x} + 1, \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

d'où $y(x) = \frac{1}{1+ce^{-4x}}$, avec $c \in \mathbb{R}$ comme avant.

1.6. Equations différentielles d'ordre supérieur.

Equations différentielles linéaires d'ordre supérieur.

Définition. Une équation différentielle d'ordre n est dite linéaire si elle peut s'écrire sous la forme :

$$y^{(n)}(x) + g_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + g_2(x)y''(x) + g_1(x)y'(x) + g_0(x)y(x) = f(x)$$

où $g_0, g_1, g_2, \dots, g_{n-1}, f$ sont des fonctions d'une variable.

La fonction f est appelée terme inhomogène.

Si $f(x) = 0$ pour tout x on dit que l'équation est homogène.

Sinon, on dit qu'elle est inhomogène.

Pour $n=1$, on a $y'(x) + g_0(x)y(x) = f(x) \Leftrightarrow y'(x) = \underbrace{-g_0(x)}_{=g(x)}y(x) + f(x)$

Rappel. (Algèbre linéaire)

Soient V, W des espaces vectoriels

On dit que $T: V \rightarrow W$ est une application linéaire si :

- $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$ pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in V$
- $T(\lambda \vec{u}) = \lambda T(\vec{u})$ pour tout $\vec{u} \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

Le noyau de T : $\text{Ker}(T) = \{ \vec{v} \in V : T(\vec{v}) = \vec{0} \}$ est un sous-espace vectoriel de V .

Par contre, $\{ \vec{v} \in V : T(\vec{v}) = \vec{w}, \text{ avec } \vec{w} \neq \vec{0} \}$, n'est pas un sous-espace vectoriel de V .

Considérons maintenant l'application.

$$T: C^n(I) \rightarrow C^0(I) \\ u \mapsto u^{(n)} + g_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + g_2 u'' + g_1 u' + g_0 u$$

Comme la dérivation est linéaire;

$$(u+v)^{(k)} = u^{(k)} + v^{(k)} \quad \text{pour tout } u, v \in C^n(I) \text{ et } k \leq n,$$

l'application T est linéaire.

Par conséquent, l'équation différentielle linéaire

$$y^{(n)}(x) + g_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + g_2(x)y''(x) + g_1(x)y'(x) + g_0(x)y(x) = f(x)$$

peut s'écrire sous la forme compacte:

$$T(y) = f$$

l'équation différentielle linéaire **homogène** associée

$$y^{(n)}(x) + g_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + g_2(x)y''(x) + g_1(x)y'(x) + g_0(x)y(x) = 0$$

peut s'écrire sous la forme compacte :

$$T(y) = 0$$

Par conséquent, le noyau de T est formé des solutions de l'équation linéaire homogène. Autrement dit, $\text{Ker}(T)$ **est** la solution générale de l'équation différentielle linéaire **homogène**.

Théorème.

La solution générale de l'équation différentielle linéaire
homogène.

$y^{(n)}(x) + q_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + q_2(x)y''(x) + q_1(x)y'(x) + q_0(x)y(x) = 0$
est un sous-espace vectoriel de $C^n(I)$ de dimension n .

Conséquence.

Pour trouver la solution générale d'une équation différentielle
linéaire homogène d'ordre n , il suffit de trouver n
solutions linéairement indépendantes de l'équation.

Commençons par traiter un cas simple :

1.7. Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.

Définition. Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 est dite à coefficients constants si elle est de la forme

$$y''(x) + b y'(x) + c y(x) = f(x) \quad (I)$$

où f est une fonction d'une variable et $b, c \in \mathbb{R}$ sont des constantes réelles.

L'équation différentielle linéaire homogène associée est

$$y''(x) + b y'(x) + c y(x) = 0 \quad (H)$$

Rappel. Nous avons vu que la fonction $y(x) = e^{\lambda x}$ est une solution de l'équation différentielle linéaire homogène $y'(x) - \lambda y(x) = 0$.

Idee. (Euler, 1739)

Cherchons une solution de $y''(x) + b y'(x) + c y(x) = 0$ de la forme $y(x) = e^{\lambda x}$, où le nombre $\lambda \in \mathbb{R}$ est à déterminer.

Comme $y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$ et $y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$, nous avons:

$$\begin{aligned} y''(x) + b y'(x) + c y(x) &= \lambda^2 e^{\lambda x} + b \lambda e^{\lambda x} + c e^{\lambda x} \\ &= e^{\lambda x} (\lambda^2 + b \lambda + c) \end{aligned}$$

Comme $e^{\lambda x} > 0$ nous avons ainsi

$$y''(x) + b y'(x) + c y(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 + b \lambda + c = 0$$

ce qui implique :

$$\left. \begin{array}{l} y(x) = e^{\lambda x} \text{ solution de} \\ y''(x) + b y'(x) + c y(x) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda \text{ racine du polynôme} \\ p_c(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c \end{array} \right.$$

Définition. Le polynôme

$$p_c(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c$$

est le polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle linéaire homogène

$$y''(x) + b y'(x) + c y(x) = 0$$

Rappel. Les racines du polynôme $p_c(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c$ sont

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

- Si $b^2 - 4c > 0$ alors $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$
- Si $b^2 - 4c = 0$ alors $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$
- Si $b^2 - 4c < 0$ alors $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$ et $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$

De plus, comme

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = p_c(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c$$

nous avons

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -b \\ \lambda_1 \lambda_2 = c \end{cases}$$

Théorème. Soient λ_1, λ_2 les racines du polynôme caractéristique associé à $y''(x) + b y'(x) + c y(x) = 0$ (H)

1. Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors la solution générale de (H) est:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2. Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$, alors la solution générale de (H) est:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}, \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

3. Si $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$, alors $\lambda_1 = \alpha + i\beta = \overline{\lambda_2}$, avec $\beta \neq 0$ et la solution générale de (H) est:

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x), \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$