

Question. Comment trouver une solution de (I) ?

Réponse 1. Parfois on peut "deviner" la solution.

Exemple.

L'équation différentielle $y'(x) = y(x) + 5$ possède

$$y_p(x) = -5$$

comme solution (car $y_p'(x) = 0$ et $-5 + 5 = 0$).

Ainsi, vu que la solution générale de $y'(x) = y(x)$ est

$$y_{\text{hom}}(x) = ce^x, \text{ avec } c \in \mathbb{R}.$$

la solution générale de $y'(x) = y(x) + 5$ est

$$y(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_p(x) = ce^x - 5, \text{ avec } c \in \mathbb{R}.$$

Réponse 2: Méthode de la variation de la constante.

Rappel. La solution générale de $y'(x) = g(x)y(x)$ est $y_{\text{hom}}(x) = ce^{G(x)}$

Idée. Chercher une solution de $y'(x) = g(x)y(x) + f(x)$

de la forme $y_p(x) = \gamma(x)e^{G(x)}$, où γ est une fonction
(on "varie" la constante)

$$\begin{aligned} \text{On a } y_p'(x) &= (\gamma(x)e^{G(x)})' = \gamma'(x)e^{G(x)} + \underbrace{\gamma(x)e^{G(x)}}_{= y_p(x)} \underbrace{G'(x)}_{= g(x)} \\ &= \gamma'(x)e^{G(x)} + g(x)y_p(x) \end{aligned}$$

Ainsi, pour que y_p soit une solution de $y'(x) = g(x)y(x) + f(x)$

il faut satisfaire $\gamma'(x)e^{G(x)} = f(x)$

Autrement dit $\gamma'(x) = f(x)e^{-G(x)}$

Méthode de résolution des équations linéaires inhomogènes

$y'(x) = g(x)y(x) + f(x)$ (avec g et f fonctions continues):

- Trouver une primitive G de g .
- Trouver une primitive γ de $f(x)e^{-G(x)}$
- Ecrire la solution générale

$$y(x) = ce^{G(x)} + \gamma(x)e^{G(x)}, \text{ avec } c \in \mathbb{R}.$$

- S'il y a une condition initiale $y(x_0) = y_0$, fixer la constante.

Remarque.

Par abus de langage, on écrit parfois $G(x) = \int g(x) dx$ et

$$\gamma(x) = \int f(x)e^{-G(x)} dx$$

Exemples.

1. Trouver la solution générale de

$$y'(x) = y(x) + 5$$

[Ici $g(x)=1$ et $f(x)=5$]

$$g(x)=1 \Rightarrow G(x)=x$$

$$f(x)e^{-G(x)} = 5e^{-x} \Rightarrow \gamma(x) = \int 5e^{-x} dx = -5e^{-x}$$

Solution générale: $y(x) = ce^x + (-5e^{-x})e^x$

$$\Rightarrow y(x) = ce^x - 5, \text{ avec } c \in \mathbb{R} \text{ (comme avant)}$$

$$\text{Vérification: } (ce^x - 5)' = ce^x$$

$$(ce^x - 5) + 5 = ce^x$$

2. Trouver la solution générale de

$$y'(x) = \frac{1}{x} y(x) + x^5, \text{ avec } x < 0$$

[Ici $g(x) = \frac{1}{x}$ continue sur $] -\infty, 0[$ et $f(x) = x^5$]

$$g(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow G(x) = \ln|x| \Rightarrow G(x) = \ln(-x) \text{ car } x < 0$$

$$\Rightarrow e^{G(x)} = e^{\ln(-x)} \Rightarrow e^{G(x)} = -x$$

$$f(x) e^{-G(x)} = x^5 (-x)^{-1} = -x^4 \Rightarrow y(x) = \int (-x^4) dx = -\frac{x^5}{5}$$

$$\text{Solution générale: } y(x) = c(-x) + \left(-\frac{x^5}{5}\right)(-x)$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{5} x^6 - cx, \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

$$\text{Vérification: } \left(\frac{1}{5} x^6 - cx\right)' = \frac{6}{5} x^5 - c$$

$$\frac{1}{x} \left(\frac{1}{5} x^6 - cx\right) + x^5 = \frac{1}{5} x^5 - c + x^5 = \frac{6}{5} x^5 - c$$

3. Trouver la solution générale de

$$y'(x) = \tan(x) y(x) + \frac{1}{\cos(x)}, \text{ avec } x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

[Ici $g(x) = \tan(x)$ et $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ continues sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$]

$$g(x) = \tan(x) \Rightarrow G(x) = \int \tan(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = -\ln|\cos(x)|$$

$$\Rightarrow G(x) = -\ln(\cos(x)), \text{ car } x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$\Rightarrow e^{G(x)} = e^{-\ln(\cos(x))} = e^{\ln(\cos(x))^{-1}} = (\cos(x))^{-1}$$

$$\Rightarrow e^{G(x)} = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$f(x) e^{-G(x)} = \frac{1}{\cos(x)} \cdot \cos(x) = 1 \Rightarrow \gamma(x) = \int 1 \cdot dx = x$$

$$\text{Solution générale: } y(x) = c \frac{1}{\cos(x)} + x \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{x+c}{\cos(x)}, \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

Vérification:
$$\left(\frac{x+c}{\cos(x)}\right)' = \frac{1 \cdot \cos(x) - (x+c)(-\sin(x))}{(\cos(x))^2}$$

$$= \frac{1}{\cos(x)} + \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{x+c}{\cos(x)}$$

4. Trouver la solution de

$$y'(x) = \tan(x) y(x) + \frac{1}{\cos(x)}, \text{ avec } x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

qui satisfait la condition initiale $y(0) = 2$

On a : $2 = \frac{0+c}{\cos(0)} = \frac{c}{1} \Rightarrow c = 2$

Par conséquent, la solution cherchée est $y(x) = \frac{x+2}{\cos(x)}$

5. Même question avec la condition initiale $y(\frac{\pi}{3}) = 2$

On a : $2 = \frac{\frac{\pi}{3}+c}{\cos(\frac{\pi}{3})} = \frac{\frac{\pi}{3}+c}{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} = c + \frac{\pi}{3} \Rightarrow c = 1 - \frac{\pi}{3}$

Par conséquent, la solution cherchée est $y(x) = \frac{x+1-\frac{\pi}{3}}{\cos(x)}$

6. Trouver la solution générale de

$$y'(x) = y(x) + \sin(x).$$

[Ici $g(x)=1$ et $f(x)=\sin(x)$]

$$g(x)=1 \Rightarrow G(x)=x$$

$$f(x)e^{-G(x)} = \sin(x)e^{-x} \Rightarrow \gamma(x) = \int \sin(x)e^{-x} dx$$

$$\int \underset{\substack{\uparrow \\ -e^{-x}}}{e^{-x}} \underset{\substack{\downarrow \\ \cos(x)}}{\sin(x)} dx = -e^{-x} \sin(x) + \int \underset{\substack{\uparrow \\ -e^{-x}}}{e^{-x}} \underset{\substack{\downarrow \\ \sin(x)}}{\cos(x)} dx$$

$$= -e^{-x} \sin(x) - e^{-x} \cos(x) - \int e^{-x} \sin(x) dx$$

$$\Rightarrow 2 \int e^{-x} \sin(x) dx = -e^{-x} (\sin(x) + \cos(x))$$

$$\Rightarrow \gamma(x) = -\frac{1}{2} e^{-x} (\sin(x) + \cos(x))$$

Calcul alternatif :

Rappel: $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$, $\cos(x) = \operatorname{Re}(e^{ix})$, $\sin(x) = \operatorname{Im}(e^{ix})$

$$\begin{aligned}\int e^{-x} \sin(x) dx &= \operatorname{Im} \left(\int e^{-x} e^{ix} dx \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\int e^{(-1+i)x} dx \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{1}{-1+i} e^{(-1+i)x} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{1}{-1+i} \frac{-1-i}{-1-i} e^{(-1+i)x} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{1}{2} (-1-i) e^{-x} (\cos(x) + i \sin(x)) \right) \\ &= \frac{1}{2} e^{-x} (-\cos(x) - \sin(x))\end{aligned}$$

Solution générale: $y(x) = ce^x + \left(-\frac{1}{2} e^{-x} (\cos(x) + \sin(x)) \right) e^x$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = ce^x - \frac{1}{2} (\cos(x) + \sin(x))}, \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

Méthode des coefficients indéterminés.

Lorsque la fonction g est une constante : $g(x) = K$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et la fonction f est

- soit un polynôme,
- soit une fonction exponentielle de la forme e^{ax} , avec $a \in \mathbb{R}$,
- soit une fonction trigonométrique de la forme $\sin(bx)$ ou $\cos(bx)$, avec $b \in \mathbb{R}$,
- soit un produit de ce type de fonctions,

alors il est possible de trouver une solution y_p de l'équation différentielle $y'(x) = K y(x) + f(x)$ qui a la même forme que f .

Exemples.

1. Trouver la solution générale de

$$y'(x) = 3y(x) + 2x$$

Ici $g(x) = 3$ est une fonction constante

et $f(x) = 2x$ est un polynôme de degré 1.

On cherche une solution y_p qui a la même forme que f :

$$y_p(x) = ax + b,$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ sont des constantes à déterminer.

Comme $y_p'(x) = a$ et y_p est une solution, on a:

$$y_p'(x) = 3y_p(x) + 2x \iff a = 3(ax + b) + 2x$$

autrement dit, $\underbrace{(3a+2)}_{=0}x + \underbrace{(3b-a)}_{=0} = 0$ pour tout x

On doit satisfaire :

$$\begin{cases} 3a+2=0 \\ 3b-a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ b = \frac{a}{3} = -\frac{2}{9} \end{cases}$$

La solution cherchée est donc :

$$y_p(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{9}$$

Comme $y_{\text{hom}}(x) = ce^{3x}$, avec $c \in \mathbb{R}$, la solution générale est

$$y(x) = ce^{3x} - \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}, \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

Vérification: $(ce^{3x} - \frac{2}{3}x - \frac{2}{9})' = 3ce^{3x} - \frac{2}{3}$

$$3(ce^{3x} - \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}) + 2x = 3ce^{3x} - 2x - \frac{2}{3} + 2x$$

2. Reprenons l'équation différentielle $y'(x) = y(x) + \sin(x)$.

Ici $g(x)=1$ est une fonction constante

et $f(x) = \sin(x) = 1 \cdot \sin(x) + 0 \cdot \cos(x)$ [sin et cos vont ensemble]

On cherche une solution y_p qui a la même forme que f :

$y_p(x) = a \sin(x) + b \cos(x)$ où $a, b \in \mathbb{R}$ sont à déterminer.

Comme $y_p'(x) = a \cos(x) - b \sin(x)$ on doit satisfaire:

$$\underbrace{a \cos(x) - b \sin(x)}_{= y_p'(x)} = \left(\underbrace{a \sin(x) + b \cos(x)}_{= y_p(x)} \right) + \sin(x) \text{ pour tout } x$$

autrement dit, $\underbrace{(a+1+b)}_{=0} \sin(x) + \underbrace{(b-a)}_{=0} \cos(x) = 0$

$$\begin{cases} a+1+b=0 \\ b-a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-1 \\ -a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases} \text{ (comme avant)}$$

1.4. Équations différentielles homogènes.

Définition. Une équation différentielle d'ordre 1 est **homogène** si elle est de la forme :

$$y'(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right)$$

Pour résoudre une équation différentielle homogène, le changement de variables $u(x) = \frac{y(x)}{x}$ peut s'avérer utile :

On a $y(x) = x u(x)$ et $y'(x) = u(x) + x u'(x)$, d'où :

$$u(x) + x u'(x) = f(u(x)) \Leftrightarrow u'(x) = \frac{1}{x} [f(u(x)) - u(x)]$$

L'équation différentielle homogène est ainsi transformée en une équation séparable.