

1.3. Equations différentielles linéaires d'ordre 1.

Définition. Une équation différentielle linéaire d'ordre 1 est une équation qui peut être mise sous la forme :

$$y'(x) = g(x)y(x) + f(x)$$

où f et g sont des fonctions de la variable x .

La fonction f est appelée **terme inhomogène**.

Remarque.

On va montrer plus tard que si f et g sont continues alors

l'équation différentielle linéaire $y'(x) = g(x)y(x) + f(x)$

possède une unique solution qui satisfait la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

A. Equation différentielle linéaire homogène.

Si $f(x)=0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors on a l'équation différentielle

$$\boxed{y'(x) = g(x) y(x)} \quad (H)$$

appelée équation différentielle linéaire homogène.

Constat: Il s'agit d'une équation séparable (avec $h(y)=y$) !

Par conséquent, on sait la résoudre.

La fonction $h(y)=y$ s'annule en $y_0=0$. Par conséquent, la fonction constante $\boxed{y(x)=0}$ est une solution singulière de (H).

Si $y(x) \neq 0$, alors on "sépare" les variables: $\frac{1}{y(x)} y'(x) = g(x)$

On intègre par rapport à x :

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int g(x) dx$$

d'où $\ln|y(x)| = G(x) + C$ où G est une primitive de g et $C \in \mathbb{R}$.

A ce stade, il s'agit d'expliciter $y(x)$:

$$|y(x)| = e^{G(x) + C} = e^C e^{G(x)}$$

d'où $|y(x)| = K e^{G(x)}$, où nous avons posé $K = e^C > 0$

Ainsi $y(x) = \pm K e^{G(x)}$

ou encore $y(x) = c e^{G(x)}$, où $c = \pm K \neq 0$

Par conséquent, la solution générale s'écrit

$$\begin{cases} y(x) = 0 & (\text{solution singulière}) \\ y(x) = c e^{G(x)} & , \text{ avec } c \neq 0. \end{cases}$$

ou plus simplement, $y(x) = c e^{G(x)}$, avec $c \in \mathbb{R}$

Méthode de résolution des équations linéaires homogènes $y'(x) = g(x)y(x)$

(avec g fonction continue):

- Trouver une primitive G de g .
- Ecrire la solution générale $y(x) = c e^{G(x)}$, avec $c \in \mathbb{R}$.
- S'il y a une condition initiale $y(x_0) = y_0$, fixer la constante.

Exemples.

1. Trouver la solution générale de l'équation différentielle

$$y'(x) = \cot(x)y(x) \quad , \text{ avec } x \in]0, \pi[$$

[la fonction $g(x) = \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ est continue sur $]0, \pi[$]

$$\begin{aligned} \text{On a } \int \cot(x) dx &= \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx = \int \frac{(\sin(x))'}{\sin(x)} dx \\ &= \ln |\sin(x)| + \tilde{C} \quad , \text{ avec } \tilde{C} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Comme on cherche une primitive, on prend

$$G(x) = \ln |\sin(x)| \quad (\text{primitive associée à } \tilde{C}=0)$$

Comme $x \in]0, \pi[$ on peut écrire

$$G(x) = \ln(\sin(x))$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation différentielle

$$y'(x) = \cot(x) y(x), \text{ avec } x \in]0, \pi[$$

est $y(x) = c e^{\ln(\sin(x))}$, avec $c \in \mathbb{R}$

autrement dit, $y(x) = c \sin(x)$, avec $c \in \mathbb{R}$

Pour chaque valeur de $c \in \mathbb{R}$, la solution maximale est définie sur l'intervalle $]0, \pi[$.

Vérification:

$$y'(x) = (c \sin(x))' = c \cos(x)$$

$$\cot(x) \cdot y(x) = c \cdot \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \cdot \sin(x) = c \cdot \cos(x)$$

2. Modèle simple de croissance de la population.

Hypothèse: "la variation du nombre d'individus est proportionnelle au nombre d'individus."

Soit $y(t) > 0$ le nombre d'individus au temps t .

L'hypothèse peut s'écrire:

$$y'(t) = a y(t), \text{ avec } a > 0 \text{ une constante.}$$

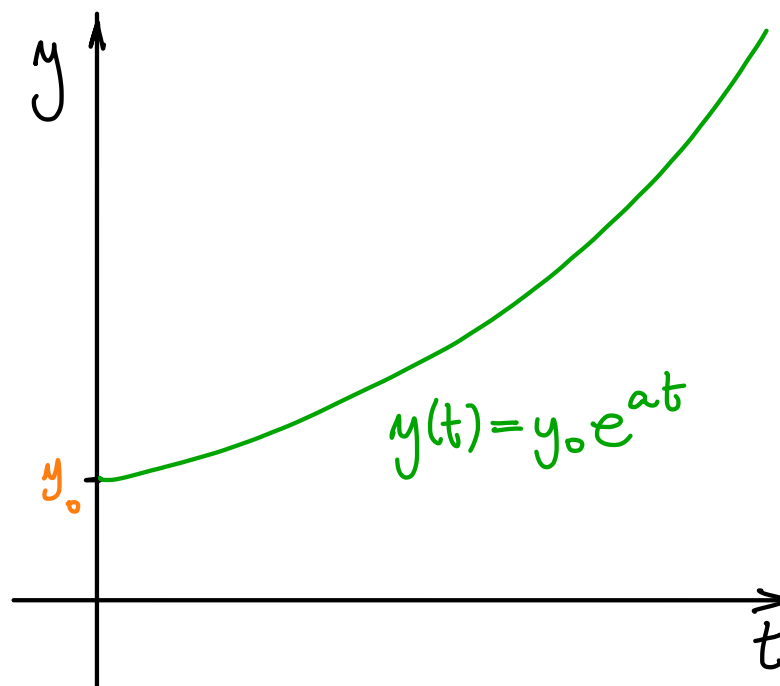
Il s'agit d'une équation linéaire homogène! (avec $g(t) = a$ fonction constante).

Comme $G(t) = at$ est une primitive de g la solution générale de $y'(t) = a y(t)$ est $y(t) = ce^{at}$, avec $c \in \mathbb{R}$

Si on prend la condition initiale $y(0) = y_0 > 0$, alors

$$y_0 = y(0) = ce^{a \cdot 0} = c$$

et $y(t) = y_0 e^{at}$ est la solution cherchée.



(voir l'exercice 10 de la série 2 pour un modèle plus réaliste).

3. Variation de la température d'un corps en fonction du temps.

Soit $T(t)$ la température d'un corps au temps t .

Soit T_a la température ambiante.

- Si $T(t) < T_a$ (ou $T(t) - T_a < 0$), alors T augmente ($T'(t) > 0$)
- Si $T(t) > T_a$ (ou $T(t) - T_a > 0$), alors T diminue ($T'(t) < 0$)
- Si $T(t) = T_a$ (ou $T(t) - T_a = 0$), alors T ne change pas ($T'(t) = 0$)

En première approximation, la variation de la température est proportionnelle à son écart par rapport à T_a :

$$T'(t) = -k (T(t) - T_a)$$

où $k > 0$ est une constante qui dépend du corps.

Il s'agit d'une équation séparable (avec $g(t) = -k$ et $h(T) = T - T_a$) et aussi d'une équation linéaire inhomogène (avec $g(t) = -k$ et $f(t) = kT_a$, fonctions constantes).

Considérons le changement de variable $y(t) = T(t) - T_a$

Comme $y'(t) = T'(t) - 0 = T'(t)$, l'équation différentielle devient:

$$y'(t) = -k y(t)$$

avec solution générale $y(t) = c e^{-kt}$, avec $c \in \mathbb{R}$.

Ainsi, $T(t) - T_a = c e^{-kt}$.

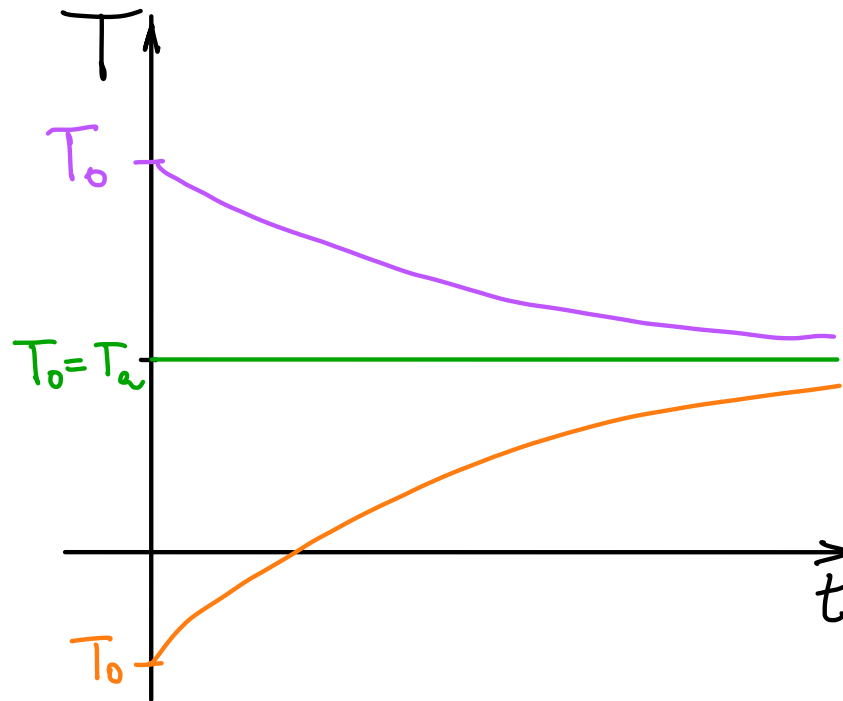
La solution générale de $T'(t) = -k(T(t) - T_a)$ est donc

$$T(t) = T_a + c e^{-kt}, \text{ avec } c \in \mathbb{R}.$$

Si on se donne la condition initiale $T(0) = T_0$, on a :

$$T_0 = T(0) = T_a + c e^{-k \cdot 0} = T_a \Rightarrow c = T_0 - T_a$$

et la solution associée est $T(t) = T_a + (T_0 - T_a) e^{-kt}$



Le résultat est raisonnable car $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = T_a$
et $T(t) = T_a$ si $T_0 = T_a$.

B. Equation différentielle linéaire inhomogène.

Considérons l'équation différentielle linéaire inhomogène

$$y'(x) = g(x) y(x) + f(x) \quad (I)$$

et l'équation différentielle linéaire homogène associée :

$$y'(x) = g(x) y(x) \quad (H)$$

Théorème. La solution générale de l'équation

$$y'(x) = g(x)y(x) + f(x) \quad (I)$$

s'écrit $y(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_p(x)$

où y_{hom} est la solution générale de

$$y'(x) = g(x)y(x) \quad (H)$$

et y_p est une solution de (I).

Remarque.

Ce résultat est une généralisation de

$\int h(x) dx = H(x) + c$, avec $c \in \mathbb{R}$ et H une primitive de h
(qui correspond à $g(x) = 0$ et $f(x) = h(x)$).

Preuve.

Comme y_p est une solution de (I) nous avons :

$$y_p'(x) = g(x) y_p(x) + f(x)$$

1. A voir: pour chaque $c \in \mathbb{R}$, la fonction $y_c(x) = y_p(x) + c e^{G(x)}$

est aussi une solution de (I) :

$$\begin{aligned} y_c'(x) &= (y_p(x) + c e^{G(x)})' = y_p'(x) + c e^{G(x)} G'(x) \\ &= (g(x) y_p(x) + f(x)) + c e^{G(x)} g(x) \\ &= g(x) (y_p(x) + c e^{G(x)}) + f(x) \\ &= g(x) y_c(x) + f(x) \end{aligned}$$

2. Il reste à voir que toutes les solutions de (I) sont de la forme $y_c(x) = y_p(x) + ce^{G(x)}$ pour un certain $c \in \mathbb{R}$.

Soit ψ une solution quelconque de (I). Nous avons:

$$\left. \begin{aligned} \psi'(x) &= g(x)\psi(x) + f(x) \\ y_p'(x) &= g(x)y_p(x) + f(x) \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \psi'(x) - y_p'(x) = g(x)\psi(x) - g(x)y_p(x)$$

$$\Rightarrow (\psi(x) - y_p(x))' = g(x)(\psi(x) - y_p(x))$$

$\Rightarrow \psi(x) - y_p(x)$ est une solution de (H) et s'écrit

$$\psi(x) - y_p(x) = ce^{G(x)} \text{ pour un certain } c \in \mathbb{R}$$

$$\text{d'où } \psi(x) = y_p(x) + ce^{G(x)}$$



Conséquence.

Pour résoudre l'équation linéaire inhomogène (I) il faut :

– résoudre l'équation linéaire homogène (H) :

$$y_{\text{hom}}(x) = c e^{G(x)}, \text{ avec } G \text{ une primitive de } g \text{ et } c \in \mathbb{R}.$$

– trouver une solution de (I).