

Chapitre 1: Equations différentielles ordinaires.

1.1. Définitions et exemples.

Définition. Une équation différentielle ordinaire (EDO) est une équation mettant en relation :

- une variable (par exemple x ou t),
- une fonction **inconnue** y qui dépend de la variable,
- certaines dérivées de la fonction y par rapport à la variable: y' , y'' , y''' , ...

On appelle **ordre** de l'équation différentielle ordinaire, l'ordre de la dérivée la plus élevée qui apparaît dans l'équation.

Le terme "ordinaire" fait allusion au fait que la fonction inconnue dépend d'une seule variable. Les équations différentielles aux dérivées partielles font appel à des fonctions de plusieurs variables.

Dans ce cours, on étudiera seulement des équations différentielles ordinaires et de ce fait, le terme "ordinaire" sera omis par la suite.

Exemples.

1. $y'(x) = x^2$, ordre 1
2. $y'(x) = (y(x))^2$, ordre 1
3. $y'(x) = x^3 + \sqrt{y(x)}$, ordre 1
4. $y''(x) + 6y'(x) + y(x) = e^x$, ordre 2
5. $y^{(4)}(x) + y(x) = x^5 + \sin(x)$, ordre 4

Définition.

- On appelle **solution** d'une équation différentielle d'ordre n toute **fonction de classe C^n** qui la satisfait sur un intervalle ouvert (non-vide) $I \subset \mathbb{R}$.
- On dit qu'une solution $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ est **maximale** s'il n'existe pas de solution $\tilde{y}: J \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $I \subset J$, $I \neq J$ et y est une restriction de $\tilde{y}$ sur l'intervalle I .
- On appelle **solution générale** d'une équation différentielle, l'ensemble de toutes les solutions de l'équation différentielle.

Exemples.

1. Considérons l'équation différentielle $y'(x) = 5x^4$.

- La fonction $y(x) = x^5$ (définie sur $\mathbb{R}$) est une solution (maximale) de $y'(x) = 5x^4$ car $(x^5)' = 5x^4$.
- Toute fonction de la forme $y(x) = x^5 + c$, avec $c \in \mathbb{R}$ est aussi une solution de $y'(x) = 5x^4$ sur $\mathbb{R}$.

Nous savons par le cours d'Analyse I qu'il n'y a pas d'autre solution.

Par conséquent, la solution générale est l'ensemble des fonctions $y(x) = x^5 + c$ (définies sur $\mathbb{R}$) avec $c \in \mathbb{R}$. Par abus de langage, on dira que $y(x) = x^5 + c$, avec $c \in \mathbb{R}$ est la solution générale.

2. Comme $y(x) = \frac{1}{x-3}$ est telle que $y'(x) = -\frac{1}{(x-3)^2}$, alors

$$y(x) = \frac{1}{x-3}, \text{ avec } x \in]-\infty, 3[$$

$$\text{et } y(x) = \frac{1}{x-3}, \text{ avec } x \in]3, +\infty[$$

sont des solutions (maximales) de $y'(x) = -\frac{1}{(x-3)^2}$

Convention: Si le domaine d'une solution y d'une équation différentielle d'ordre n n'est pas donné de manière explicite, alors on prend le plus grand intervalle ouvert (non-vide)

$I \subset \mathbb{R}$ où y est une fonction de classe C^n .

Ainsi, la solution générale de $y'(x) = -\frac{1}{(x-3)^2}$ peut s'écrire

$$y(x) = \frac{1}{x-3} + c, \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

Lorsqu'on se donne une équation différentielle, deux types de problème se posent :

- 1) Trouver **la** solution générale de l'équation différentielle
- 2) Trouver **une** solution de l'équation différentielle qui satisfait des conditions supplémentaires (appelées **conditions initiales**).

Remarque.

La recherche d'une solution d'une équation différentielle avec conditions initiales est appelée **problème de Cauchy**.

Exemple.

Résoudre $y''(x) = 0$ (ordre 2)

L'intégration nous donne: $y'(x) = a$, avec $a \in \mathbb{R}$

et $y(x) = ax + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ (solution générale)

Si on demande en plus $\begin{cases} y(1) = 5 \\ y'(1) = 2 \end{cases}$ (conditions initiales)

$$\text{on obtient: } \begin{cases} 5 = a \cdot 1 + b \\ 2 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 2 \end{cases}$$

Ainsi, la solution cherchée est

$$y(x) = 2x + 3$$

1.2. Equations différentielles séparables d'ordre 1.

L'équation différentielle $y'(x) = g(x)$, où g est une fonction continue peut être résolue en intégrant par rapport à x :

$$\int y'(x) dx = \int g(x) dx$$

$\Rightarrow \boxed{y(x) = G(x) + c}$, avec G une primitive de g et $c \in \mathbb{R}$

Il y a une famille importante d'équations différentielles qui peut être résolue de manière analogue.

Définition.

Une équation différentielle d'ordre 1 est **séparable** si elle peut s'écrire sous la forme :

$$y'(x) = g(x) h(y(x))$$

où g est une fonction qui dépend de la variable x
et h est une fonction qui dépend de y

Remarque.

On va montrer plus tard que l'équation différentielle séparable $y'(x) = g(x) h(y(x))$ avec condition initiale $y(x_0) = y_0$ possède une unique solution lorsque g et h sont des fonctions continues.

Exemples.

1. $y'(x) = g(x) = g(x) \cdot 1$ est séparable

2. $y'(x) = 2x(y(x))^2$ est séparable

3. $y'(x) = 3x^2(y(x)-3)$ est séparable

Par contre, $y'(x) = x + y(x)$ n'est pas séparable

Remarque.

– S'il existe un nombre $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $h(y_0) = 0$, alors la fonction constante $y(x) = y_0$, avec $x \in \mathbb{R}$, est une solution de l'équation séparable $y'(x) = g(x)h(y(x))$, appelée *solution singulière*.

En effet, $(y_0)' = 0$ et $g(x)h(y_0) = g(x) \cdot 0 = 0$.

Question. Comment trouver la solution générale d'une équation séparable $y'(x) = g(x)h(y(x))$?

Réponse. Méthode de séparation des variables.

Illustrons la méthode à l'aide de quelques exemples :

Exemples.

1. Trouver la solution générale de l'équation différentielle

$$y'(x) = 2x(y(x))^2 \quad [\text{notation abrégée : } y' = 2xy^2]$$

[la continuité de $g(x) = 2x$ et $h(y) = y^2$ garantit l'existence des solutions de l'équation différentielle]

La fonction $h(y) = y^2$ s'annule en $y = 0$. Par conséquent,

$y(x) = 0$ est une solution singulière.

Si $y(x) \neq 0$, alors on "sépare" les variables: $(y(x))^{-2} y'(x) = 2x$

On intègre par rapport à x :

$$\int (y(x))^{-2} y'(x) dx = \int 2x dx \Leftrightarrow -(y(x))^{-1} = x^2 + c, \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

$$\left[\int (y(x))^{-2} y'(x) dx = \int \underset{\substack{\uparrow \\ u=y(x) \\ du=y'(x)dx}}{u^{-2} du} = -u^{-1} + c = -(y(x))^{-1} + c \right]$$

A ce stade, il s'agit d'expliciter $y(x)$ (lorsque cela est possible):

$$\frac{1}{y(x)} = -x^2 - C \Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{-x^2 - C}, \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

Solution générale:

$$\begin{cases} y(x) = 0 & (\text{solution singulière}) \\ y(x) = \frac{1}{-x^2 - C}, \text{ avec } C \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

2. Trouver la solution (maximale) de $y'(x) = 2x(y(x))^2$

qui satisfait la condition initiale $y(0) = 4$

Commençons par déterminer la valeur de la constante C :

$$\text{On a: } \frac{1}{4} = \frac{1}{y(0)} = -0^2 - C \Rightarrow C = -\frac{1}{4}$$

La solution cherchée est donc: $y(x) = \frac{1}{-x^2 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{1 - 4x^2}$

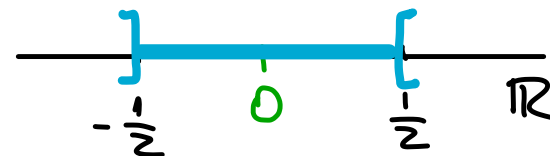
Cherchons maintenant le plus grand intervalle ouvert I

qui contient $x=0$ où y est de classe C^1 :

$$\text{On a } 1 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow (1 - 2x)(1 + 2x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

la solution maximale est donc:

$$y(x) = \frac{4}{1 - 4x^2}, \text{ avec } x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$$



3. Trouver la solution (maximale) de $y'(x) = 2x(y(x))^2$

qui satisfait la condition initiale $y(-1) = -\frac{4}{3}$

Commençons par déterminer la valeur de la constante C :

On a: $-\frac{3}{4} = \frac{1}{y(-1)} = -(-1)^2 - C \Rightarrow C = -\frac{1}{4}$ (comme pour l'exemple 2)

La solution cherchée est donc: $y(x) = \frac{1}{-x^2 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{1 - 4x^2}$

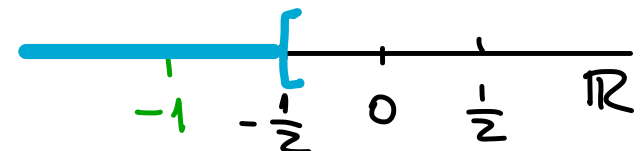
Cherchons maintenant le plus grand intervalle ouvert I

qui contient $x = -1$ où y est de classe C^1 :

On a $1 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow (1 - 2x)(1 + 2x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{1}{2}$

la solution maximale est donc:

$$y(x) = \frac{4}{1 - 4x^2}, \text{ avec } x \in]-\infty, -\frac{1}{2}[$$



4. Trouver la solution générale de l'équation différentielle

$$y'(x) = \frac{1}{x^3} (y(x)^2 + 1), \text{ avec } x > 0.$$

[la condition $x > 0$ garantit la continuité de $g(x) = \frac{1}{x^3}$ et
par conséquent, l'existence des solutions de l'équation différentielle]

Comme $h(y) = y^2 + 1 \geq 1$ ne s'annule pas, il n'y a pas de solutions singulières.

On "sépare" les variables: $(y(x)^2 + 1)^{-1} y'(x) = \frac{1}{x^3}$

On intègre par rapport à x :

$$\int \frac{1}{(y(x))^2 + 1} y'(x) dx = \int x^{-3} dx \Leftrightarrow \arctan(y(x)) = \frac{x^{-2}}{-2} + C$$

$$\left[\int \frac{1}{(y(x))^2 + 1} y'(x) dx = \int \frac{1}{u^2 + 1} du = \arctan(u) + C = \arctan(y(x)) + C \right]$$

$\uparrow$
 $u = y(x)$
 $du = y'(x) dx$

A ce stade, il s'agit d'expliciter $y(x)$ (lorsque cela est possible):

$$\boxed{y(x) = \tan\left(C - \frac{1}{2x^2}\right), \text{ avec } C \in \mathbb{R}} \quad (\text{solution générale})$$

5. Trouver la solution générale de l'équation différentielle

$$y'(x) = x e^{x+y(x)}$$

L'équation donnée est séparable: $y'(x) = x e^x e^{y(x)}$

[La continuité de $g(x) = x e^x$ et $h(y) = e^y$ garantit l'existence des solutions de l'équation différentielle]

Comme $h(y) = e^y > 0$ ne s'annule pas, il n'y a pas de solutions singulières.

On "sépare" les variables: $e^{-y(x)} y'(x) = x e^x$

On intègre par rapport à x :

$$\underbrace{\int e^{-y(x)} y'(x) dx}_{= -e^{-y(x)}} = \int \underbrace{x}_{\downarrow 1} \underbrace{e^x}_{\uparrow e^x} dx = x e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x e^x - e^x + C$$

Nous avons donc $-e^{-y(x)} = e^x(x-1) + c$, avec $c \in \mathbb{R}$

ou encore $e^{-y(x)} = e^x(1-x) - c$

A ce stade, il s'agit d'expliciter $y(x)$ (lorsque cela est possible):

$$-y(x) = \ln(e^x(1-x) - c)$$

La solution générale est donc :

$$y(x) = -\ln(e^x(1-x) - c), \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

6. Trouver la solution de l'équation différentielle $y'(x) = xe^{x+y(x)}$ qui satisfait la condition initiale $y(0) = 0$.

$$\text{Nous avons } 1 = e^{-0} = e^{-y(0)} = e^0(1-0) - C = 1 - C \Rightarrow C = 0$$

La solution cherchée est donc $y(x) = -\ln(e^x(1-x))$

autrement dit $y(x) = -x - \ln(1-x)$

La solution est maximale si l'on considère l'intervalle $] -\infty, 1[$.

7. Trouver la solution de l'équation différentielle $y'(x) = xe^{x+y(x)}$ qui satisfait la condition initiale $y(1) = 0$.

$$\text{Nous avons } e^{-0} = e^{-y(1)} = e^1(1-1) - C = -C \Rightarrow C = -1$$

La solution cherchée est donc $y(x) = -\ln(e^x(1-x) + 1)$

Méthode de résolution des équations séparables $y'(x) = g(x)h(y(x))$

(avec g et h des fonctions continues):

- Trouver les zéros de la fonction h (s'ils existent) pour obtenir les solutions singulières.
- "Séparer" les variables et intégrer par rapport à x .
- Expliciter $y(x)$ lorsque cela est possible.
- S'il y a une condition initiale $y(x_0) = y_0$, fixer la constante.