

Analyse II

EPFL – Sections SIE/GC

Examen d'entraînement

Durée 60 min

Question 1. La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'(x) + 6x^5(y(x))^2 = 0$$

qui satisfait la condition initiale $y(1) = \frac{1}{3}$ vérifie aussi

$y(\sqrt{2}) = \frac{1}{3e^7}$

$y(\sqrt{2}) = -\frac{1}{4}$

$y(\sqrt{2}) = -\frac{13}{24}$

$y(\sqrt{2}) = \frac{1}{10}$

Question 2. La solution $u(t)$ de l'équation différentielle

$$u''(t) - 2u'(t) + 5u(t) = 17 \sin(2t)$$

qui satisfait les conditions initiales $u(0) = 1$ et $u'(0) = 1$ vérifie aussi

$u(\pi) = 4 - 3e^\pi$

$u(\pi) = -4 + 5e^\pi$

$u(\pi) = 4$

$u(\pi) = 4 - 4e^\pi$

Question 3. Le sous-ensemble

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 0 \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

est ouvert et non borné

est ouvert et borné

est fermé et non borné

est fermé et borné

Question 4. Soit $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} + \frac{x y^3}{x^2 + y^6}.$$

Alors

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 1$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ n'existe pas

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 2$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$

Question 5. Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \sin(x^2 y).$$

Alors la dérivée directionnelle de f en $(1, \pi)$ suivant le vecteur $\mathbf{v} = (-1, 2\pi)$ vaut

0

-3π

$2\pi - 2\pi^3$

-1

Question 6. Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Alors

- f est différentiable en $(0, 0)$, mais f n'est pas de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$
- les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ n'existent pas
- les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existent, mais f n'est pas différentiable en $(0, 0)$
- f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$

Question 7. Pour $\tilde{D} =]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$ et $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$, soit $G: \tilde{D} \rightarrow D$ définie par

$$G(r, \varphi) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)).$$

Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, une fonction de classe $C^1(D)$ et soit $\tilde{f}: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\tilde{f}(r, \varphi) = (f \circ G)(r, \varphi)$. Si

$$J_{\tilde{f}}(r, \varphi) = J_{f \circ G}(r, \varphi) = \left(2r + \cos(\varphi) \sin(\varphi) \quad r (\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)) \right)$$

pour tout $(r, \varphi) \in \tilde{D}$, alors

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$ |
| <input type="checkbox"/> $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{4}$ | <input type="checkbox"/> $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$ |

Question 8. Soit $(x_0, y_0) = \left(\sqrt{\pi/6}, \sqrt{2\pi/3}\right)$ et soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \sin(x^2) + \cos(y^2).$$

L'équation $f(x, y) = 0$ définit dans un voisinage de x_0 une fonction $y = g(x)$ telle que $g(x_0) = y_0$ et $f(x, g(x)) = 0$. De plus, on a

- $g'(x_0) = \frac{\pi}{2}$
- $g'(x_0) = -\frac{\pi}{2}$
- $g'(x_0) = \frac{1}{2}$
- $g'(x_0) = -\frac{1}{2}$

Question 9. Soit E un sous ensemble de \mathbb{R}^n et soit \overline{E} son adhérence. Si $E = \overline{E}$, alors le bord de E est vide.

Vrai Faux

Question 10. Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $(\mathbf{a}_k)_{k \geq 1}$ une suite dans \mathbb{R}^n telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{a}_k = \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n.$$

Si $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{a}_k) = 1$, alors $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = 1$.

Vrai Faux

Question 11. Soit $(\mathbf{x}_k)_{k \geq 1}$ une suite dans \mathbb{R}^n telle que $\|\mathbf{x}_k\| = 1$ pour tout $k \geq 1$.

Alors il existe $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|\mathbf{x}\| = 1$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$.

Vrai Faux

Question 12. Soit $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction et soit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Si les dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a})$ existent pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$, alors \mathbf{f} est différentiable en \mathbf{a} .

Vrai Faux

Question 13. Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^4(\mathbb{R}^2)$. Alors

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}(x, y) = \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}(x, y), \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Vrai Faux