Analyse II — Examen d'entraînement

EPFL – Sections SIE/GC — Solutions

Question 1. La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'(x) + 6x^5(y(x))^2 = 0$$

qui satisfait la condition initiale $y(1) = \dfrac{1}{3}$ vérifie aussi

- ☐ $y(\sqrt{2}) = \dfrac{1}{3e^7}$
- ☐ $y(\sqrt{2}) = -\dfrac{1}{4}$
- ☐ $y(\sqrt{2}) = -\dfrac{13}{24}$
- ■ $y(\sqrt{2}) = \dfrac{1}{10}$

Question 2. La solution $u(t)$ de l'équation différentielle

$$u''(t) - 2u'(t) + 5u(t) = 17\sin(2t)$$

qui satisfait les conditions initiales $u(0) = 1$ et $u'(0) = 1$ vérifie aussi

- ■ $u(\pi) = 4 - 3e^{\pi}$
- ☐ $u(\pi) = -4 + 5e^{\pi}$
- ☐ $u(\pi) = 4$
- ☐ $u(\pi) = 4 - 4e^{\pi}$

Question 3. Le sous-ensemble

$$A = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 0 \;\text{ et }\; x^2 + y^2 + z^2 = 1\big\}$$

- ☐ est ouvert et non borné
- ☐ est ouvert et borné
- ☐ est fermé et non borné
- ■ est fermé et borné

Question 4. Soit $f\colon \mathbb{R}^2\backslash\big\{(0,0)\big\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2} + \frac{xy^3}{x^2+y^6}\,.$$

Alors

- ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$
- ■ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas
- ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 2$
- ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

Question 5. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \sin(x^2y)\,.$$

Alors la dérivée directionnelle de f en $(1,\pi)$ suivant le vecteur $\boldsymbol{v} = \big(-1,\, 2\pi\big)$ vaut

- ■ 0
- ☐ -3π
- ☐ $2\pi - 2\pi^3$
- ☐ -1

Question 6. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Alors

- ☐ f est différentiable en $(0,0)$, mais f n'est pas de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$
- ☐ les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ n'existent pas
- ■ les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent, mais f n'est pas différentiable en $(0,0)$
- ☐ f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$

Question 7. Pour $\widetilde{D} = \,]0,+\infty[\, \times \,]0,2\pi[$ et $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$, soit $G\colon \widetilde{D} \to D$ définie par

$$G(r,\varphi) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)).$$

Soit $f\colon D \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto f(x,y)$, une fonction de classe $C^1(D)$ et soit $\widetilde{f} : \widetilde{D} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\widetilde{f}(r,\varphi) = (f \circ G)(r,\varphi)$. Si

$$J_{\tilde{f}}(r,\varphi) = J_{f\circ G}(r,\varphi) = \Big(2r + \cos(\varphi)\sin(\varphi) \quad r\left(\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)\right)\Big)$$

pour tout $(r,\varphi) \in \widetilde{D}$, alors

- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1$
- ■ $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{5\sqrt{2}}{4}$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 1$

Question 8. Soit $(x_0, y_0) = \left(\sqrt{\pi/6}, \sqrt{2\pi/3}\right)$ et soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \sin(x^2) + \cos(y^2).$$

L'équation $f(x,y) = 0$ définit dans un voisinage de x_0 une fonction $y = g(x)$ telle que $g(x_0) = y_0$ et $f\big(x, g(x)\big) = 0$. De plus, on a

- ☐ $g'(x_0) = \dfrac{\pi}{2}$
- ☐ $g'(x_0) = -\dfrac{\pi}{2}$
- ■ $g'(x_0) = \dfrac{1}{2}$
- ☐ $g'(x_0) = -\dfrac{1}{2}$

Question 9. Soit E un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ et soit $\overline{E}$ son adhérence. Si $E = \overline{E}$, alors le bord de E est vide.

☐ Vrai ■ Faux

Question 10. Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $\big(\boldsymbol{a}_k\big)_{k\geq 1}$ une suite dans $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n.$$

Si $\lim\limits_{k\to\infty} f(\boldsymbol{a}_k) = 1$, alors $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = 1$.

■ Vrai ☐ Faux

Question 11. Soit $\big(\boldsymbol{x}_k\big)_{k\geq 1}$ une suite dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\|\boldsymbol{x}_k\| = 1$ pour tout $k \geq 1$. Alors il existe $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ et $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}$.

☐ Vrai ■ Faux

Question 12. Soit $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction et soit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Si les dérivées partielles $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$ existent pour tout $i \in \{1,\ldots,m\}$ et $j \in \{1,\ldots,n\}$, alors $\boldsymbol{f}$ est différentiable en $\boldsymbol{a}$.

☐ Vrai ■ Faux

Question 13. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^4(\mathbb{R}^2)$. Alors

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}(x,y) = \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}(x,y), \qquad \text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

☐ Vrai ■ Faux