Vrai / Faux : Il existe une unique solution $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y'(x) = 2\sqrt{y(x)}$$

qui vérifie la condition initiale $y(0) = 0$.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 30 (5p) : Déterminer la solution maximale $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'(x) + y(x) = (y(x))^2\ , \qquad \text{telle que} \qquad y(0) = \frac{1}{2}\,.$$

Solution 30 :
Méthode 1 : Equation de Bernoulli.
On divise par y^2 : $\dfrac{y'}{y^2} + \dfrac{1}{y} = 1$. On pose $z = \dfrac{1}{y} \Rightarrow z' = -\dfrac{y'}{y^2}$, et l'équation devient

$$-z' + z = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z' - z = -1.$$

C'est une équation linéaire d'ordre 1. L'équation homogène est $z' - z = 0$, qui a pour solution générale Ce^x. Une solution particulière de l'équation originale est $z \equiv 1$. On trouve donc comme solution générale

$$z = 1 + Ce^x \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{1 + Ce^x}.$$

La condition initiale $y(0) = \frac{1}{2}$ donne $C = 1$, donc la solution maximale est $y(x) = \dfrac{1}{e^x + 1}$ qui est <u>définie sur $\mathbb{R}$</u>.

Méthode 2 : Séparation des variables.
On a

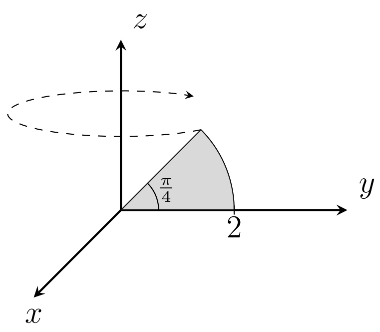
$$\frac{dy}{dx} + y = y^2 \;\Leftrightarrow\; \int \frac{1}{y(y-1)}\, dy = \int dx = x + C.$$

A l'aide de fractions simples, on trouve $\dfrac{1}{y(y-1)} = \dfrac{1}{y-1} - \dfrac{1}{y}$ d'où

$$\log|y - 1| - \log|y| = \log\left|\frac{y-1}{y}\right| = x + C \;\Leftrightarrow\; \frac{y-1}{y} = Ce^x \Leftrightarrow y = \frac{1}{1 - Ce^x}$$

La condition initiale $y(0) = \frac{1}{2}$ donne $C = -1$, donc la solution maximale est $y(x) = \dfrac{1}{e^x + 1}$ qui est <u>définie sur $\mathbb{R}$</u>.

Question 31 (5p) : Soit D_0 le secteur circulaire grisé suivant (situé dans le plan yz) et D le solide de révolution engendré par rotation de D_0 autour de l'axe z :



(a) Donner une paramétrisation de D en coordonnées sphériques.

(b) Donner une paramétrisation de D en coordonnées cylindriques.

(c) Calculer le volume de D.

Solution 31 :

(a) $$D = \Big\{(x,y,z) = (r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\theta)) \mid r \in [0,2], \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right], \varphi \in [0,2\pi]\Big\}$$

(b) On observe que $D_0 \subseteq$ plan yz est borné par les droites $z = 0$, $z = y$ et $y^2 + z^2 = 4$. Ainsi, z varie entre 0 et $\sqrt{2}$, et y entre z et $\sqrt{4 - z^2}$. En tournant autour de z, y est remplacé par r. D'où

$$D = \Big\{(x,y,z) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z) \mid \varphi \in [0,2\pi], z \in \left[0, \sqrt{2}\right], r \in \left[z, \sqrt{4 - z^2}\right], \Big\}.$$

(c) *Méthode 1 : Avec la paramétrisation de (a).* On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(D) &= \int_D 1\, dxdydz = \int_0^2 dr \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \big(r^2 \sin(\theta)\big) \\
&= 2\pi \int_0^2 r^2\, dr \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin(\theta)\, d\theta = 2\pi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 \cdot \Big[-\cos(\theta)\Big]_{\pi/4}^{\pi/2} \\
&= \frac{16\pi}{3}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{8\pi\sqrt{2}}{3}.
\end{aligned}$$

Méthode 2 : Avec la fomule du volume des solides de rotation vue en cours. Si D_0 est le domaine grisé (qu'on paramétrise en coordonnées polaires), on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(D) &= 2\pi \cdot \mathrm{Aire}(D_0) \cdot (\text{coord. } y \text{ du centre de gravité}) = 2\pi \int_{D_0} y\, dydz \\
&= 2\pi \int_0^2 dr \int_0^{\pi/4} d\theta \Big(r\cos(\theta) \cdot r\Big) = 2\pi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 \cdot \Big[\sin(\theta)\Big]_0^{\pi/4} \\
&= \frac{16\pi}{3}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{8\pi\sqrt{2}}{3}.
\end{aligned}$$

Question 32 (5p) : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en $(0,0)$, telle que $f(0,0) = 0$. Montrer que pour tout $\alpha < \frac{1}{2}$, on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{(x^2+y^2)^\alpha} = 0.$$

Solution 32 : On distingue deux cas :

(a) Si $\alpha \leq 0$, on pose $\beta = -\alpha \geq 0$, et on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{(x^2+y^2)^\alpha} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^\beta \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \cdot f(0,0) = 0$$

en utilisant la règle des produits de limites et la continuité de f.

(b) Si $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, on pose $\nabla f(0,0) = (a,b)$, et on a

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + \langle (a,b), (x,y) \rangle + \|(x,y)\| \, \varepsilon(x,y) \\ &= ax + by + (x^2+y^2)^{1/2} \, \varepsilon(x,y) \end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x,y) = 0$ (définition de différentiabilité en $(0,0)$). Il suit

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{(x^2+y^2)^\alpha} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ax+by}{(x^2+y^2)^\alpha} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{1/2-\alpha} \varepsilon(x,y)$$

La deuxième limite vaut $0 \cdot 0 = 0$ car $\alpha < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} - \alpha > 0$.

Pour la première, on utilise les coordonnées polaires $(x,y) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$. On trouve

$$\begin{aligned} \left| \frac{ax+by}{(x^2+y^2)^\alpha} \right| = \frac{r\,|a\cos(\varphi) + b\sin(\varphi)|}{r^{2\alpha}.} &= r^{1-2\alpha}\,|a\cos(\varphi) + b\sin(\varphi)| \\ &\leq (|a| + |b|) r^{1-2\alpha} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

lorsque $(x,y) \to 0 \Rightarrow r \to 0$, car $\alpha < \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - 2\alpha > 0$.