

Q29: (a) $\frac{dy}{dx} = e^{-x} e^{-y} \Rightarrow \int e^y dy = \int e^{-x} dx$

$\Rightarrow e^y = -e^{-x} + C \quad (C \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow y(x) = \log(C - e^{-x})$

Comme $y(0) = 0$, on trouve

$0 = y(0) = \log(C - 1) \Rightarrow 1 = C - 1 \Rightarrow C = 2$

Donc $y(x) = \log(2 - e^{-x})$. Cette fonction est bien définie (et vérifie l'EDO) sur le domaine

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 - e^{-x} > 0\}$

$\Rightarrow e^{-x} < 2 \Rightarrow -x < \log(2)$

$\Rightarrow x > -\log(2)$

$\Rightarrow D =]-\log(2), +\infty[$ et la sol max est

$$\left[\begin{array}{l} y:]-\log(2), +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto y(x) = \log(2 - e^{-x}) \end{array} \right]$$

(b) On reprend la sol générale de (a):

$y(x) = \log(C - e^{-x})$

On a $y_0 = y(x_0) = \log(C - e^{-x_0})$

$\Rightarrow e^{y_0} = C - e^{-x_0} \Rightarrow C = e^{-x_0} + e^{y_0}$

Donc $y(x) = \log(e^{-x_0} + e^{y_0} - e^{-x})$ qui est définie (et sol de l'EDO) sur $D = \{x \in \mathbb{R} \mid e^{-x_0} + e^{y_0} - e^{-x} > 0\}$

$\Rightarrow e^{-x} < e^{-x_0} + e^{y_0} \Rightarrow -x < \log(e^{-x_0} + e^{y_0})$

$\Rightarrow x > -\log(e^{-x_0} + e^{y_0})$

$\Rightarrow$ la sol max est

$$\left[\begin{array}{l} y:]-\log(e^{-x_0} + e^{y_0}), +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \log(e^{-x_0} + e^{y_0} - e^{-x}) \end{array} \right]$$

(c) la fonction $f(x, y) = e^{-x} e^{-y}$ est C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Par un théorème du cours, il existe donc une unique solution maximale, pour chaque cond. initiale $y(x_0) = y_0$. Ce sont celles trouvées en (a) et (b).

Q 30: On a $\nabla f = \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ 2y+x+z \\ x+y \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix}$

$\textcircled{3} \Rightarrow y = -x \Rightarrow \begin{cases} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{cases} = \begin{cases} x+z = 0 \\ -x+z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = x \Rightarrow \boxed{z=0} \Rightarrow \boxed{x=0}$

$\Rightarrow \boxed{y=0}$

Il y a donc un unique pt stat: $(0, 0, 0)$.

On calcule la Hessienne:

$\text{Hess}_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{Hess}_f(0, 0, 0).$

On a $\Lambda_1 = 2 > 0$, $\Lambda_2 = 3 > 0$,

$\Lambda_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 < 0$

$\Rightarrow (0, 0, 0)$ est un point selle de f .

Q 31: On a $f'(t) = (\cos(t) - t\sin(t) - \cos(t), \sin(t) + t\cos(t) - \sin(t), 2t)$
 $= (-t\sin(t), t\cos(t), 2t)$

$\Rightarrow \|f'(t)\|^2 = (-t\sin(t))^2 + (t\cos(t))^2 + 4t^2 = 5t^2$

$\Rightarrow \text{longueur} = \int_0^{2\pi} \|f'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{5} \cdot t dt = \sqrt{5} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{2\pi} = 2\pi^2\sqrt{5}$