

Analyse II

Examen

Partie commune

Printemps 2022

Réponses

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

- +3 points si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
- −1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

- +1 point si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
- −1 point si la réponse est incorrecte.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures.
Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = 9x$$

qui satisfait les conditions initiales $y(0) = 4$ et $y'(0) = 3$ vérifie aussi

☐ $y(1) = 2e^3 - 1$

☐ $y(1) = 1 - 2e^3$

☒ $y(1) = 6e - 5$

☐ $y(1) = 5 - 6e$

Question 2 : Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(t) = \int_4^{t^2} e^{tx^2} dx.$$

Alors

☐ $F'(2) = 0$

☒ $F'(2) = 4e^{32}$

☐ $F'(2) = e^{32}$

☐ $F'(2) = 2e^{32}$

Question 3 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{\tan(3x^2 + y^2)}{3x^2 + y^2}.$$

Alors

☒ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 1$

☐ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ n'existe pas

☐ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = -1$

☐ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$

Question 4 : Soit D le sous-ensemble de \mathbb{R}^2 donné par

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Alors l'intégrale

$$\int_D xy^3 dx dy$$

vaut

☒ $\frac{8}{3}$

☐ $\frac{16}{3}$

☐ $\frac{16}{5}$

☐ $\frac{8}{5}$

Question 5 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'(x) = (y(x))^2 \frac{\cos(x)}{(2 + \sin(x))^2}$$

qui satisfait la condition initiale $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{4}$ vérifie aussi

☐ $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$

☐ $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{4}{3}$

☒ $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{7}$

☐ $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5}{3}$

Question 6 : Le sous-ensemble

$$A = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 5z^2 < 10\} \subset \mathbb{R}^3$$

- ☐ est borné et ouvert
- ☒ est borné et non ouvert
- ☐ est non fermé et non borné
- ☐ est fermé et ouvert

Question 7 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = 3x^2y - x^3 - 3y^4.$$

Alors

- ☐ le point $(2, 1)$ est un point stationnaire de f mais n'est pas un point d'extremum local de f
- ☐ le point $(2, 1)$ est un point de minimum local de f
- ☒ le point $(2, 1)$ est un point de maximum local de f
- ☐ le point $(2, 1)$ n'est pas un point stationnaire de f

Question 8 : Soient $f_1, f_2, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de n variables et soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ définie par

$$f(\mathbf{x}) = \left(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}) \right) \quad \text{pour tout } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Alors

- ☐ il est possible que f soit différentiable même si f_j est discontinue pour un certain $j \in \{1, \dots, m\}$
- ☐ si la matrice jacobienne de f existe partout, alors f est différentiable
- ☐ f est forcément différentiable
- ☒ si f n'est pas différentiable, alors il existe $j \in \{1, \dots, m\}$ tel que f_j n'est pas de classe C^1

Question 9 : Soit D le sous-ensemble de \mathbb{R}^3 donné par

$$D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq x, z \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z^2 \leq x^2 + y^2 \}.$$

Alors l'intégrale

$$\int_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$$

est égale à

☐ $\int_1^3 \left(\int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{\pi/4} r \sin^2(\theta) d\varphi \right) d\theta \right) dr$

☒ $\int_1^3 \left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/4} r \sin^2(\theta) d\varphi \right) d\theta \right) dr$

☐ $\int_1^3 \left(\int_0^{\pi/4} \left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} r \sin^2(\theta) d\varphi \right) d\theta \right) dr$

☐ $\int_1^3 \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} r \sin^2(\theta) d\varphi \right) d\theta \right) dr$

Question 10 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin(|y|)}{\sqrt{3x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Alors la dérivée directionnelle de f en $(0, 0)$ suivant le vecteur $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

☐ n'existe pas

☐ vaut $\frac{1}{2}$

☐ vaut 0

☒ vaut $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Question 11 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'(x) - \frac{4}{x} y(x) = x^4 + x^2$$

qui satisfait la condition initiale $y(1) = -2$ vérifie aussi

☐ $y(2) = 32$

☐ $y(2) = 8$

☒ $y(2) = -8$

☐ $y(2) = -16$

Question 12 : Soit (a_n) la suite d'éléments de \mathbb{R}^3 définie par

$$a_n = \left(2 + \frac{1}{n}, \frac{(-1)^n}{n}, \frac{3n^2 - n + 1}{2n^2 + e^n + 1} \right), \quad \text{pour tout } n \in \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Alors

- ☐ la suite n'est pas bornée
- ☐ la suite converge vers $(2, 0, \frac{3}{2})$
- ☐ la suite est bornée mais ne converge pas
- ☒ la suite converge vers $(2, 0, 0)$

Question 13 : L'intégrale

$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \cos(x^3) dx \right) dy$$

vaut

- ☐ $\frac{1}{3} (1 - \sin(1))$
- ☐ $\sqrt{\sin(1)}$
- ☒ $\frac{1}{3} \sin(1)$
- ☐ $\frac{1}{3} \sqrt{\sin(1)}$

Question 14 : Soit $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \frac{1}{4} \right\}$ et soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{\log(1 + x + y)}{1 + x - y}.$$

Alors le polynôme de Taylor d'ordre deux de f autour du point $(0, 0)$ est

- ☒ $p_2(x, y) = x + y - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - xy$
- ☐ $p_2(x, y) = x + y - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - xy$
- ☐ $p_2(x, y) = x + y + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}y^2 + xy$
- ☐ $p_2(x, y) = x + y + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}y^2 - xy$

Question 15 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = xy^2$$

et soit $g(x, y) = 2x^2 + y^2 - 6$. Alors, sous la contrainte $g(x, y) = 0$,

- ☐ la valeur minimale de f est égale à -8
- ☐ la valeur minimale de f est égale à -2
- ☐ la valeur minimale de f est égale à -6
- ☒ la valeur minimale de f est égale à -4

Question 16 : Soit $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$$g(x, y, z) = (x^2 + y^2 + 1, yz)$$

et soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que

$$J_f(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{2}{u} + 2v & 2u \end{pmatrix}.$$

Alors la fonction composée $h = f \circ g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait:

☒ $\frac{\partial h}{\partial y}(-1, 0, 1) = 4$

☐ $\frac{\partial h}{\partial y}(-1, 0, 1) = 0$

☐ $\frac{\partial h}{\partial y}(-1, 0, 1) = -2$

☐ $\frac{\partial h}{\partial y}(-1, 0, 1) = 2$

Question 17 : Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ et soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = 2x^y - y^x - 1.$$

L'équation $f(x, y) = 0$ définit implicitement dans un voisinage de $x = 1$ une fonction $y = g(x)$ qui satisfait $g(1) = 1$ et $f(x, g(x)) = 0$. La valeur de $g'(1)$ est alors

☐ $g'(1) = -2$

☒ $g'(1) = 2$

☐ $g'(1) = 0$

☐ $g'(1) = -1$

Question 18 : Soit S la surface

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 2xz = 4\}$$

et soit $z_0 \in \mathbb{R}$ tel que $(1, 1, z_0) \in S$. Alors

☐ l'équation du plan tangent à S au point $(1, 1, z_0)$ est $2x + 2y + 2z - 6 = 0$

☒ l'équation du plan tangent à S au point $(1, 1, z_0)$ est $2x + y + z - 4 = 0$

☐ la valeur de z_0 n'est pas unique

☐ l'équation du plan tangent à S au point $(1, 1, z_0)$ est $2z - 4x - 2y + 8 = 0$

Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 19 : Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et soit $\mathbf{x}_0 \in U$. Si $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, alors \mathbf{x}_0 est un point d'extremum local de f .

☐ VRAI ☒ FAUX

Question 20 : Soient A et B deux sous-ensembles non vides de \mathbb{R}^n . Si A est un ensemble fermé et B est un ensemble ouvert, alors $C = \{\mathbf{x} \in B : \mathbf{x} \notin A\}$ est un ensemble ouvert.

☒ VRAI ☐ FAUX

Question 21 : Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(\mathbf{a}) = 1$. Soit $(\mathbf{a}_k)_{k \geq 1}$ une suite de \mathbb{R}^n qui converge vers \mathbf{a} . Si $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{a}_k) = 1$, alors f est continue en \mathbf{a} .

☐ VRAI ☒ FAUX

Question 22 : Soit A un sous-ensemble non vide de \mathbb{R}^3 tel que $A \neq \mathbb{R}^3$. Si le bord ∂A est borné, alors A est borné.

☐ VRAI ☒ FAUX

Question 23 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent, alors la dérivée directionnelle $D_{\mathbf{v}}f(0,0)$ existe et est égale au produit scalaire de $\nabla f(0,0)$ avec \mathbf{v} , pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ tel que $\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$.

☐ VRAI ☒ FAUX

Question 24 : Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et soit $\mathbf{x}_0 \in U$ tel que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existent dans un voisinage de \mathbf{x}_0 pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$.

Si $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, alors f est continue en \mathbf{x}_0 .

☒ VRAI ☐ FAUX

Question 25 : Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Si les dérivées directionnelles $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a})$ existent et sont continues dans un voisinage de \mathbf{a} pour tout \mathbf{v} , alors la fonction f est différentiable en \mathbf{a} .

☒ VRAI ☐ FAUX

Question 26 : Soit $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Alors

$$\int_D \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dx dy dz \geq \frac{2\pi}{3}.$$

☒ VRAI ☐ FAUX

Question 27 : Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble fermé et soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si f est bornée et admet au moins un point de maximum global sur E , alors E est borné.

☐ VRAI ☒ FAUX

Question 28 : Soit $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Soit $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : F(\mathbf{x}) = 0\}$ la surface de niveau 0 de F .

Si $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in S$ sont tels que les plans tangents à S en \mathbf{a} et \mathbf{b} sont parallèles, alors $\nabla F(\mathbf{a}) = \nabla F(\mathbf{b})$.

☐ VRAI ☒ FAUX