Durée : 144 minutes

Analyse II
Examen
Partie commune
Printemps 2022

Enoncé

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

$+3$ points si la réponse est correcte,

0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,

-1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

$+1$ point si la réponse est correcte,

0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,

-1 point si la réponse est incorrecte.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = 9x$$

qui satisfait les conditions initiales $y(0) = 4$ et $y'(0) = 3$ vérifie aussi

☐ $y(1) = 2e^3 - 1$ ☐ $y(1) = 1 - 2e^3$ ☐ $y(1) = 6e - 5$ ☐ $y(1) = 5 - 6e$

Question 2 : Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(t) = \int_4^{t^2} e^{tx^2}\, dx\,.$$

Alors

☐ $F'(2) = 0$ ☐ $F'(2) = 4e^{32}$ ☐ $F'(2) = e^{32}$ ☐ $F'(2) = 2e^{32}$

Question 3 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \big\{(0,0)\big\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{\tan(3x^2 + y^2)}{3x^2 + y^2}\,.$$

Alors

☐ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$

☐ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas

☐ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = -1$

☐ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

Question 4 : Soit D le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ donné par

$$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ x^2 + y^2 \leq 4\big\}\,.$$

Alors l'intégrale

$$\int_D xy^3\, dx\, dy$$

vaut

☐ $\dfrac{8}{3}$ ☐ $\dfrac{16}{3}$ ☐ $\dfrac{16}{5}$ ☐ $\dfrac{8}{5}$

Question 5 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'(x) = \big(y(x)\big)^2 \frac{\cos(x)}{\big(2 + \sin(x)\big)^2}$$

qui satisfait la condition initiale $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{4}$ vérifie aussi

☐ $y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{4}$ ☐ $y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{4}{3}$ ☐ $y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{5}{7}$ ☐ $y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{5}{3}$

Question 6 : Le sous-ensemble
$$A = \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 5z^2 < 10\} \subset \mathbb{R}^3$$

- ☐ est borné et ouvert
- ☐ est borné et non ouvert
- ☐ est non fermé et non borné
- ☐ est fermé et ouvert

Question 7 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(x,y) = 3x^2y - x^3 - 3y^4 .$$
Alors

- ☐ le point $(2,1)$ est un point stationnaire de f mais n'est pas un point d'extremum local de f
- ☐ le point $(2,1)$ est un point de minimum local de f
- ☐ le point $(2,1)$ est un point de maximum local de f
- ☐ le point $(2,1)$ n'est pas un point stationnaire de f

Question 8 : Soient $f_1, f_2, \ldots, f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ des fonctions de n variables et soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ définie par
$$f(\boldsymbol{x}) = \Big(f_1(\boldsymbol{x}),\, f_2(\boldsymbol{x}), \ldots,\, f_m(\boldsymbol{x})\Big) \qquad \text{pour tout } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$
Alors

- ☐ il est possible que f soit différentiable même si f_j est discontinue pour un certain $j \in \{1, \ldots, m\}$
- ☐ si la matrice jacobienne de f existe partout, alors f est différentiable
- ☐ f est forcément différentiable
- ☐ si f n'est pas différentiable, alors il existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tel que f_j n'est pas de classe C^1

Question 9 : Soit D le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq x\,,\ z \geq 0\,,\ 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 9\,,\ z^2 \leq x^2+y^2 \right\}.$$

Alors l'intégrale

$$\int_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz$$

est égale à

- ☐ $\displaystyle\int_1^3 \left(\int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{\pi/4} r \sin^2(\theta)\, d\varphi \right) d\theta \right) dr$
- ☐ $\displaystyle\int_1^3 \left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/4} r \sin^2(\theta)\, d\varphi \right) d\theta \right) dr$
- ☐ $\displaystyle\int_1^3 \left(\int_0^{\pi/4} \left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} r \sin^2(\theta)\, d\varphi \right) d\theta \right) dr$
- ☐ $\displaystyle\int_1^3 \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} r \sin^2(\theta)\, d\varphi \right) d\theta \right) dr$

Question 10 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \sin\big(|y|\big)}{\sqrt{3x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Alors la dérivée directionnelle de f en $(0,0)$ suivant le vecteur $\boldsymbol{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

- ☐ n'existe pas
- ☐ vaut $\dfrac{1}{2}$
- ☐ vaut 0
- ☐ vaut $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

Question 11 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'(x) - \frac{4}{x}\, y(x) = x^4 + x^2$$

qui satisfait la condition initiale $y(1) = -2$ vérifie aussi

- ☐ $y(2) = 32$
- ☐ $y(2) = 8$
- ☐ $y(2) = -8$
- ☐ $y(2) = -16$

Question 12 : Soit $(\boldsymbol{a}_n)$ la suite d'éléments de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\boldsymbol{a}_n = \left(2 + \frac{1}{n},\ \frac{(-1)^n}{n},\ \frac{3n^2 - n + 1}{2n^2 + e^n + 1}\right), \qquad \text{pour tout } n \in \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Alors

- ☐ la suite n'est pas bornée
- ☐ la suite converge vers $\left(2, 0, \frac{3}{2}\right)$
- ☐ la suite est bornée mais ne converge pas
- ☐ la suite converge vers $(2, 0, 0)$

Question 13 : L'intégrale

$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \cos(x^3)\, dx \right) dy$$

vaut

☐ $\frac{1}{3}\big(1 - \sin(1)\big)$ ☐ $\sqrt{\sin(1)}$ ☐ $\frac{1}{3}\sin(1)$ ☐ $\frac{1}{3}\sqrt{\sin(1)}$

Question 14 : Soit $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \frac{1}{4}\right\}$ et soit $f : D \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{\log(1 + x + y)}{1 + x - y}\,.$$

Alors le polynôme de Taylor d'ordre deux de f autour du point $(0, 0)$ est

- ☐ $p_2(x, y) = x + y - \frac{3}{2}\,x^2 + \frac{1}{2}\,y^2 - xy$
- ☐ $p_2(x, y) = x + y - \frac{1}{2}\,x^2 - \frac{1}{2}\,y^2 - xy$
- ☐ $p_2(x, y) = x + y + \frac{3}{2}\,x^2 - \frac{3}{2}\,y^2 + xy$
- ☐ $p_2(x, y) = x + y + \frac{1}{2}\,x^2 - \frac{3}{2}\,y^2 - xy$

Question 15 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = xy^2$$

et soit $g(x, y) = 2x^2 + y^2 - 6$. Alors, sous la contrainte $g(x, y) = 0$,

- ☐ la valeur minimale de f est égale à -8
- ☐ la valeur minimale de f est égale à -2
- ☐ la valeur minimale de f est égale à -6
- ☐ la valeur minimale de f est égale à -4

Question 16 : Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$$g(x, y, z) = \big(x^2 + y^2 + 1,\, yz\big)$$

et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que

$$J_f(u, v) = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{u} + 2v & 2u \end{pmatrix}.$$

Alors la fonction composée $h = f \circ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ satisfait:

- ☐ $\dfrac{\partial h}{\partial y}(-1, 0, 1) = 4$
- ☐ $\dfrac{\partial h}{\partial y}(-1, 0, 1) = 0$
- ☐ $\dfrac{\partial h}{\partial y}(-1, 0, 1) = -2$
- ☐ $\dfrac{\partial h}{\partial y}(-1, 0, 1) = 2$

Question 17 : Soit $D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\,,\ y > 0\big\}$ et soit $f : D \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = 2x^{\,y} - y^{\,x} - 1\,.$$

L'équation $f(x, y) = 0$ définit implicitement dans un voisinage de $x = 1$ une fonction $y = g(x)$ qui satisfait $g(1) = 1$ et $f\big(x, g(x)\big) = 0$. La valeur de $g'(1)$ est alors

- ☐ $g'(1) = -2$
- ☐ $g'(1) = 2$
- ☐ $g'(1) = 0$
- ☐ $g'(1) = -1$

Question 18 : Soit S la surface

$$S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 2xz = 4\big\}$$

et soit $z_0 \in \mathbb{R}$ tel que $(1, 1, z_0) \in S$. Alors

- ☐ l'équation du plan tangent à S au point $(1, 1, z_0)$ est $2x + 2y + 2z - 6 = 0$
- ☐ l'équation du plan tangent à S au point $(1, 1, z_0)$ est $2x + y + z - 4 = 0$
- ☐ la valeur de z_0 n'est pas unique
- ☐ l'équation du plan tangent à S au point $(1, 1, z_0)$ est $2z - 4x - 2y + 8 = 0$

Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 19 : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et soit $\boldsymbol{x}_0 \in U$.
Si $\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0}$, alors $\boldsymbol{x}_0$ est un point d'extremum local de f.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 20 : Soient A et B deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}^n$. Si A est un ensemble fermé et B est un ensemble ouvert, alors $C = \big\{\boldsymbol{x} \in B : \boldsymbol{x} \notin A\big\}$ est un ensemble ouvert.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 21 : Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction et $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(\boldsymbol{a}) = 1$. Soit $\big(\boldsymbol{a}_k\big)_{k\geq 1}$ une suite de $\mathbb{R}^n$ qui converge vers $\boldsymbol{a}$. Si $\lim\limits_{k\to\infty} f(\boldsymbol{a}_k) = 1$, alors f est continue en $\boldsymbol{a}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 22 : Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^3$ tel que $A \neq \mathbb{R}^3$.
Si le bord ∂A est borné, alors A est borné.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 23 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction. Si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent, alors la dérivée directionnelle $D_{\boldsymbol{v}} f(0,0)$ existe et est égale au produit scalaire de $\nabla f(0,0)$ avec $\boldsymbol{v}$, pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ tel que $\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 24 : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et soit $\boldsymbol{x}_0 \in U$ tel que les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ existent dans un voisinage de $\boldsymbol{x}_0$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Si $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0)$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, alors f est continue en $\boldsymbol{x}_0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 25 : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Si les dérivées directionnelles $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a})$ existent et sont continues dans un voisinage de $\boldsymbol{a}$ pour tout $\boldsymbol{v}$, alors la fonction f est différentiable en $\boldsymbol{a}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 26 : Soit $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Alors

$$\int_D \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} \, dx \, dy \, dz \geq \frac{2\pi}{3}.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 27 : Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble fermé et soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si f est bornée et admet au moins un point de maximum global sur E, alors E est borné.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 28 : Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Soit $S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : F(\boldsymbol{x}) = 0\}$ la surface de niveau 0 de F.

Si $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in S$ sont tels que les plans tangents à S en $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont parallèles, alors $\nabla F(\boldsymbol{a}) = \nabla F(\boldsymbol{b})$.

☐ VRAI ☐ FAUX