Durée : 144 minutes

Analyse II
Examen
Partie commune
Printemps 2021

Enoncé

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

$+3$ points si la réponse est correcte,

0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,

-1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

$+1$ point si la réponse est correcte,

0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,

-1 point si la réponse est incorrecte.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soient les sous-ensembles

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\} \qquad \text{et} \qquad B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 > 1\}.$$

Alors l'ensemble non vide $A \cap B \subset \mathbb{R}^3$ est

- ☐ ouvert
- ☐ borné
- ☐ fermé
- ☐ non borné

Question 2 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) = xy + 2yz.$$

Alors le maximum et le minimum de f sous la contrainte $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ sont respectivement

- ☐ $\dfrac{6}{\sqrt{20}}$ et $-\dfrac{6}{\sqrt{20}}$
- ☐ $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$ et $-\dfrac{\sqrt{2}}{5}$
- ☐ $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ et $-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$
- ☐ $\dfrac{5}{\sqrt{20}}$ et $-\dfrac{3}{\sqrt{20}}$

Question 3 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{\sin(y^2)}{x^2 + y^2}.$$

Alors

- ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$
- ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas
- ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \dfrac{1}{2}$
- ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

Question 4 : L'intégrale

$$\int_0^1 \left(\int_{\arctan(x)}^{\pi/4} \left(\cos^6(y) + \frac{1}{1+x^2} \right) dy \right) dx$$

vaut

☐ $\dfrac{\pi^2}{32} - \dfrac{3}{16}$ ☐ $\dfrac{\pi^2}{32} + \dfrac{7}{48}$ ☐ $\dfrac{\pi^2}{16} + \dfrac{1}{144}$ ☐ $\dfrac{\pi^2}{16} + \dfrac{5}{16}$

Question 5 : Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$$g(u, v) = \big(v^2,\, u - v\big)$$

et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} -y\sin(x) & \cos(x) + 2y \end{pmatrix}.$$

Alors la fonction composée $h = f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfait

- ☐ $\dfrac{\partial h}{\partial v}(1, 0) = 3$
- ☐ $\dfrac{\partial h}{\partial v}(1, 0) = -2$
- ☐ $\dfrac{\partial h}{\partial v}(1, 0) = -3$
- ☐ $\dfrac{\partial h}{\partial v}(1, 0) = 2$

Question 6 : L'équation du plan tangent à la surface

$$x^4 + y^4 + z^8 = 3$$

au point $(1, -1, 1)$ est

- ☐ $x + y + z = 1$
- ☐ $x + y + 2z = 3$
- ☐ $x - y + 2z = 4$
- ☐ $2x - 2y + z = 5$

Question 7 : Soit $F :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(t) = \int_{t^2}^{t} \frac{\sin^2(tx)}{x}\, dx\,.$$

Alors

- ☐ $F'(t) = \dfrac{2\sin^2(t^2)}{t} + \dfrac{\sin^2(t^3)}{t}$
- ☐ $F'(t) = \dfrac{\sin^2(t^2)}{t} - \dfrac{2\sin^2(t^3)}{t} + \sin^2(t^2) - \sin^2(t^3)$
- ☐ $F'(t) = \dfrac{2\sin^2(t^2)}{t} - \dfrac{3\sin^2(t^3)}{t}$
- ☐ $F'(t) = \dfrac{\sin^2(t^2)}{t} - \dfrac{\sin^2(t^3)}{t}$

Question 8 : Soit D le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$D = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 , \ y \geq 0 , \ z \geq 0 , 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4 , \ x^2+y^2 \leq z^2 \} .$$

Alors l'intégrale

$$\int_D \frac{z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \, dx \, dy \, dz$$

est égale à

- ☐ $\displaystyle\int_1^2 \left(\int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{\pi/2} r^3 \cos^2(\theta) \sin(\theta) \, d\varphi \right) d\theta \right) dr$
- ☐ $\displaystyle\int_1^4 \left(\int_0^{\pi/4} \left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} r^3 \cos^2(\theta) \sin(\theta) \, d\varphi \right) d\theta \right) dr$
- ☐ $\displaystyle\int_1^2 \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} r^3 \sin(\theta) \, d\varphi \right) d\theta \right) dr$
- ☐ $\displaystyle\int_1^2 \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} r \cos^2(\theta) \, d\varphi \right) d\theta \right) dr$

Question 9 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$\cos(x)y'(x) + \sin(x)y(x) = \cos^2(x)$$

qui satisfait la condition initiale $y(0) = 2$ vérifie aussi

- ☐ $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} + \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$
- ☐ $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \frac{\pi}{6}$
- ☐ $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \frac{\pi}{6}$
- ☐ $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} + \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

Question 10 : Soit D le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ donné par

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x , \ x^2+y^2 \leq 4 \} .$$

Alors l'intégrale

$$\int_D xy^2(x^2+y^2) \, dx \, dy$$

vaut

- ☐ $\frac{32\sqrt{2}}{21}$
- ☐ $\frac{2^{12}\sqrt{2}}{7}$
- ☐ $\frac{8\sqrt{2}}{9}$
- ☐ $\frac{2^8}{21}$

Question 11 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \cos(x+y)\cos(x-y)\,.$$

Alors le polynôme de Taylor d'ordre deux de f autour du point $(0,0)$ est

- ☐ $p_2(x,y) = 1 - x^2 - y^2 - 2xy$
- ☐ $p_2(x,y) = 1 + x^2 + y^2$
- ☐ $p_2(x,y) = 1 - x^2 - y^2$
- ☐ $p_2(x,y) = 1 + x^2 + y^2 - 2xy$

Question 12 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) = zy^5 + 4e^{z-x} - 2\,.$$

L'équation $f\big(x,y,z\big) = 0$ définit dans un voisinage de $(x,y) = (2,-1)$ une fonction $z = g(x,y)$ qui satisfait $g(2,-1) = 2$ et $f\big(x,y,g(x,y)\big) = 0$ ainsi que

- ☐ $\dfrac{\partial g}{\partial y}(2,-1) = \dfrac{3}{10}$
- ☐ $\dfrac{\partial g}{\partial y}(2,-1) = -\dfrac{3}{10}$
- ☐ $\dfrac{\partial g}{\partial y}(2,-1) = \dfrac{10}{3}$
- ☐ $\dfrac{\partial g}{\partial y}(2,-1) = -\dfrac{10}{3}$

Question 13 : Soit $a \in \,]0,+\infty[$ fixé et soit $y(x)$ la solution de l'équation différentielle

$$y'(x) = \left(a + \frac{x}{a}\right) y(x)$$

qui satisfait la condition initiale $y(0) = 1$. Alors

- ☐ $y(2) - y(-2) = e^{2a} - e^{-2a}$
- ☐ $y(2) - y(-2) = 0$
- ☐ $y(2)y(-2) = e^{4/a}$
- ☐ $y(2)\,y(-2) = e^{4a}$

Question 14 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{|xy|}\,\sin\!\Big(\sqrt{x^2+y^2}\Big) & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Alors

- ☐ la fonction f est différentiable en $(0,0)$
- ☐ la fonction f est continue en $(0,0)$ mais n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$
- ☐ les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent, mais f n'est pas différentiable en $(0,0)$
- ☐ la fonction f n'est pas continue en $(0,0)$

Question 15 : La solution $u(x)$ de l'équation différentielle

$$u''(x) + 9u(x) = \sin(3x)$$

qui satisfait les conditions initiales $u(0) = \frac{\pi}{6}$ et $u'(0) = -\frac{1}{6}$ vérifie aussi

- ☐ $u(\pi) = 0$
- ☐ $u(\pi) = \frac{\pi - 1}{6}$
- ☐ $u(\pi) = \frac{\pi}{6}$
- ☐ $u(\pi) = \frac{1}{6}$

Question 16 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^4}{x^4 + y^8} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Alors la dérivée directionnelle de f en $(0,0)$ suivant le vecteur $\boldsymbol{v} = \left(\frac{1}{2}\,,\, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

- ☐ vaut $\frac{9}{2}$
- ☐ vaut $\frac{3}{4}$
- ☐ n'existe pas
- ☐ vaut 0

Question 17 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = x^3 + 2y^3 + 3x^2y + 3xy^2 - x - 2y\,.$$

Alors

- ☐ $(-2/\sqrt{3}\,,\, 1/\sqrt{3}\,)$ est un point d'extremum local de f
- ☐ f a exactement deux points stationnaires
- ☐ f n'admet pas de point de maximum local
- ☐ f admet au moins un point de maximum local et au moins un point de minimum local

Question 18 : Soit $(\boldsymbol{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\boldsymbol{a}_n = \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\,,\, \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors

- ☐ la sous-suite $(\boldsymbol{a}_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ converge
- ☐ la sous-suite $(\boldsymbol{a}_{4k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ converge
- ☐ la sous-suite $((-1)^k\boldsymbol{a}_{4k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ converge
- ☐ la sous-suite $((-1)^k\boldsymbol{a}_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ converge

Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 19 : Soit $D = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\big\}$. Alors

$$\int_D \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}\, dx\, dy\, dz \geq \frac{\pi}{8}\,.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 20 : Soient

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\, x^2 + y^2 \leq 1\} \qquad \text{et} \qquad E = D \backslash \{(0, 0)\}\,.$$

Alors il existe une fonction continue $f : E \to \mathbb{R}$ qui n'est pas bornée.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 21 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\nabla f(1, 0) = \big(2,\, -1\big)$.
Si $D_{\boldsymbol{v}} f(1, 0) = 1$ pour $\boldsymbol{v} = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)$, alors f n'est pas différentiable en $(1, 0)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 22 : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide. Alors l'ensemble $f(U)$ est ouvert.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 23 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et soit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ un point stationnaire de f. Si les trois valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 de la matrice hessienne $\mathrm{Hess}_f(\boldsymbol{a})$ sont telles que

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 \qquad \text{et} \qquad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -1\,,$$

alors $\boldsymbol{a}$ n'est pas un point d'extremum local de f.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 24 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Si $\nabla f(1, -1) = \big(0,\, 0\big)$, alors $(1, -1) \in \mathbb{R}^2$ est un point d'extremum local de f.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 25 : Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ et soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une fonction différentiable en $t_0 \in \mathbb{R}$ telle que $g(t_0) = \big(x_0,\, y_0,\, z_0\big)$. S'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$F\big(g(t)\big) = c \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R},$$

alors le produit scalaire du gradient $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ avec le vecteur $g'(t_0)$ est nul.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 26 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction telle que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent. Si $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, alors f est continue au point $(0,0)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 27 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3. Si $p_2(x,y) = 2 + x^2 + 2y^2$ est le polynôme de Taylor de f d'ordre 2 autour de $(0,0)$, alors $\nabla f(0,0) = \big(0,\ 0\big)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 28 : Soient A et B deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}^n$. Alors $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$.

☐ VRAI ☐ FAUX