

Analyse II

Examen

Partie commune

Printemps 2020

Enoncé

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

- +3 points si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
- −1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

- +1 point si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
- −1 point si la réponse est incorrecte.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures.

Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 : L'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3$ est

- ☐ borné et fermé
- ☐ borné mais ni ouvert ni fermé
- ☐ non borné et ni ouvert ni fermé
- ☐ non borné mais fermé

Question 2 : Soient $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ les fonctions définies par

$$f(x, y) = y^2 + xy + \sqrt{3}x,$$
$$g(x, y) = x^2 + y^2 + xy - \frac{3}{4}.$$

Alors, sous la contrainte $g(x, y) = 0$,

- ☐ le maximum de la fonction f est plus petit que 1
- ☐ le minimum de la fonction f est plus petit que $-\sqrt{3}$
- ☐ la fonction f atteint son minimum en exactement deux points
- ☐ la fonction f atteint son maximum en exactement un point

Question 3 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{x^2y + y^4}{x^4 + y^2}.$$

Alors

- ☐ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 1$
- ☐ f n'admet pas de limite en $(0, 0)$
- ☐ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = y^2$
- ☐ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$

Question 4 : Soit

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Alors, l'intégrale

$$\int_D \log(x^2 + y^2) dx dy$$

vaut

- ☐ $\pi \log(4) - \frac{3\pi}{4}$
- ☐ $\pi \log(2) - \frac{\pi}{4}$
- ☐ $\pi \log(4) - \pi$
- ☐ $\pi \log(16) - \pi$

Question 5 : Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t) = \int_t^{t^2} \frac{1 - e^{-xt}}{x} dx$$

Alors, la dérivée de f est donnée par

☐ $f'(t) = \frac{-3e^{-t^3} + 2e^{-t^2} + 1}{t}$

☐ $f'(t) = \frac{2 - 2e^{-t^3} - 3e^{-t^2}}{t}$

☐ $f'(t) = \frac{-e^{-t^3}(t+1) + 2e^{-t^2} - t + 1}{t^2}$

☐ $f'(t) = \frac{1 - 3e^{-t^3} - e^{-t^2}}{t}$

Question 6 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la fonction définie par

$$f(x, y, z) = (y^2, z^2, x^2).$$

Alors, la matrice jacobienne de la fonction composée $g = f \circ f$ en (x, y, z) est

☐ $J_g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 4y^2z & 0 \\ 0 & 0 & 4xz^2 \\ 4x^2y & 0 & 0 \end{pmatrix}$

☐ $J_g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 4x^3 & 0 \\ 0 & 0 & 4y^3 \\ 4z^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

☐ $J_g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4z^3 \\ 4x^3 & 0 & 0 \\ 0 & 4y^3 & 0 \end{pmatrix}$

☐ $J_g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4yz \\ 4xz & 0 & 0 \\ 0 & 4xy & 0 \end{pmatrix}$

Question 7 : Soit la surface $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y^2 + z^3 - 1 = 0\}$. L'équation du plan tangent à S au point $(1, -1, -1)$ est

☐ $-(y-2) + (x+1) + (z-3) = 0$

☐ $-3z - x - 2y + 2 = 0$

☐ $x - 1 - 2(y+1) + 3(z+1) = 0$

☐ $-(x-1) + (y+1) + (z+1) = 0$

Question 8 : Soit

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

Alors, l'intégrale

$$\int_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz$$

vaut

☐ $\frac{\pi}{3}$

☐ $\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

☐ $\frac{2\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

☐ $2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Question 9 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'(x) - 2y(x) = -x^2$$

qui satisfait la condition initiale $y(0) = \frac{1}{2}$ vérifie aussi

☐ $y(1) = \frac{1}{4}e^2 + \frac{3}{4}$

☐ $y(1) = \frac{1}{4}e^2 + \frac{5}{4}$

☐ $y(1) = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{4}$

☐ $y(1) = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}$

Question 10 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors

☐ $\int_0^1 \left(\int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{y^{1/3}} f(x, y) dx \right) dy$

☐ $\int_0^1 \left(\int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{y^{1/3}}^{y^2} f(x, y) dx \right) dy$

☐ $\int_0^1 \left(\int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy \right) dx = \int_0^{\sqrt{x}} \left(\int_{y^2}^{y^{1/3}} f(x, y) dx \right) dy$

☐ $\int_0^1 \left(\int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{y^{1/3}} f(x, y) dx \right) dy$

Question 11 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \cos(2x + 3y + y^2).$$

Alors, le polynôme de Taylor d'ordre deux de f autour du point $(0, 0)$ est donné par

☐ $p_2(x, y) = 2x + 3y + y^2$

☐ $p_2(x, y) = 1 - (2x + 3y)^2$

☐ $p_2(x, y) = 1 - 2x^2 - 6xy - \frac{9}{2}y^2$

☐ $p_2(x, y) = 1 - \frac{1}{2}y^2$

Question 12: Soit, pour tout $\beta > 1$, la fonction $f_\beta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_\beta(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^\beta y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Alors, la dérivée directionnelle de f_β en $(0, 0)$ suivant le vecteur $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

☐ vaut $\frac{1}{2}$ si $\beta = 2$

☐ est un nombre réel positif si $\beta > 1$

☐ vaut $\frac{1}{2^{(\beta+1)/2}}$ si $\beta < 2$

☐ vaut 0 si $\beta > 2$

Question 13: La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'(x) = e^{x-y(x)}$$

qui satisfait la condition initiale $y(0) = 0$ vérifie aussi

☐ $y(2) = \log(2)$

☐ $y(2) = 2$

☐ $y(2) = \log(2 - e^2)$

☐ $y(2) = \frac{1}{2}$

Question 14: Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Alors

☐ toutes les dérivées partielles de f existent en $(0, 0)$, mais f n'est pas différentiable en $(0, 0)$

☐ f est de classe C^1

☐ f est différentiable en $(0, 0)$, mais f n'est pas de classe C^1

☐ f est différentiable en $(0, 0)$, mais une des dérivées partielles de f n'est pas continue en $(0, 0)$

Question 15: Soit $X \subset \mathbb{R}$ l'ensemble tel que pour tout $\alpha \in X$, toutes les solutions $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y''(x) + (\alpha + 1)y'(x) + \frac{1}{4}y(x) = 0$$

satisfont $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$. Alors

☐ $X =]-1, +\infty[$

☐ $X =]-2, 0[$

☐ $X = [-1, +\infty[$

☐ $X = \mathbb{R}$

Question 16 : Soit $\tilde{D} \subset \mathbb{R}^2$ le domaine de définition du changement de coordonnées $\Phi : \tilde{D} \rightarrow D$, défini par

$$\Phi(x_1, x_2) = \left(x_1 x_2, \frac{x_1}{x_2} \right).$$

Sachant que $D =]1, 2[\times]1, 2[$, lequel parmi les ensembles suivants est le seul à pouvoir correspondre à \tilde{D} ?

☐ $\tilde{D} = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, \quad x_1 x_2 < 2, \quad x_1 < x_2 < 2x_1 \right\}$

☐ $\tilde{D} = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, \quad \frac{1}{x_1} < x_2 < \frac{2}{x_1}, \quad x_2 < x_1 < 2x_2 \right\}$

☐ $\tilde{D} = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, \quad x_1 x_2 < 2, \quad 1 < \frac{x_2}{x_1} < 2 \right\}$

☐ $\tilde{D} = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, \quad x_2 > \frac{1}{x_1}, \quad x_2 < 2x_1 \right\}$

Question 17 : Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ et soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 + y^2.$$

Alors

☐ le minimum global de f vaut 2

☐ la fonction f n'admet pas de maximum global

☐ la fonction f admet un minimum local en $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$

☐ le maximum global de f vaut 18

Question 18 : Soit $\text{sign} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t = 0, \\ -1 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Parmi les fonctions suivantes, déterminer celle qui possède un point de discontinuité dans son domaine de définition

☐ $f :]-1, 2[\rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(t) = \left(t, |t|, \text{sign}(t)(e^t - 1) \right)$

☐ $f :]0, 5[\rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = \left(t^2, t^2 \cos\left(\frac{1}{t}\right) \right)$

☐ $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = \left(\text{sign}(t) \cos(t), \text{sign}(t) \sin(t) \right)$

☐ $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(t) = \left(e^{1/(t-2)}, \text{sign}(t) t, \sin(t) \right)$

Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 19 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1(\mathbb{R})$, et soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(x, y) = y - f(x)$. Alors, le gradient de F en $(0, f(0))$ est orthogonal à la tangente au graphe de la fonction f en $(0, f(0))$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 20 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que les dérivées partielles de f existent en $(0, 0)$. Alors, f est continue en $(0, 0)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 21 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable en tout point de \mathbb{R}^3 . Alors les fonctions dérivées partielles existent et sont continues en tout point de \mathbb{R}^3 .

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 22 : Soit y_1 une solution de l'équation différentielle $y' + y = 1$ et soit y_0 une solution de l'équation différentielle $y' + y = 0$. Alors, pour toute constante $C \in \mathbb{R}$, la fonction $y = y_0 + Cy_1$ est une solution de l'équation différentielle $y' + y = 1$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 23 : Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble borné et fermé et soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2(D)$. Alors f atteint son minimum global dans D .

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 24 : Soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $F(1, 0) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial x}(1, 0) \neq 0$. Alors, il existe un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ tel que $0 \in I$ et une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1(I)$, telle que $f(0) = 1$ et pour tout $y \in I$, $F(f(y), y) = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 25 : Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ le disque unité fermé et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'image de f est l'intervalle $[m, M]$, où m est le minimum global de f sur D et M est le maximum global de f sur D .

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 26: Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est non bornée.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 27: Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $(0,0,0)$ soit un point stationnaire de f et telle que le déterminant de la matrice hessienne de f en $(0,0,0)$ soit strictement positif. Alors, f admet un minimum local en $(0,0,0)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 28: Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Alors, $\int_D (x+y) dx dy = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX