

Analyse II

Examen

Partie commune

Printemps 2019

Réponses

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

- +3 points si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
- −1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

- +1 point si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
- −1 point si la réponse est incorrecte.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures.
Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 : La limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2|x|}{x^2 + |x| + y^2}$$

☐ vaut 2

☒ n'existe pas

☐ vaut 1

☐ vaut 0

Question 2 : Soient $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ les fonctions définies par

$$f(x, y) = 3x + 5y^2 \quad \text{et} \quad g(x, y) = x^2 + 2y^4 + 2xy^2 - 13.$$

Alors, sous la contrainte $g(x, y) = 0$,

☐ la fonction f atteint son maximum en exactement un point

☒ la fonction f atteint son maximum en $(1, \sqrt{2})$

☐ la fonction f atteint son minimum en exactement deux points

☐ le minimum de la fonction f est positif

Question 3 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = x \left| x^3 y - \frac{1}{3} \sin(x) \cos(x) \right|.$$

Alors

☒ f est différentiable en $(0, 0)$, mais n'est pas différentiable en $(\pi, 0)$

☐ $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existe, mais $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ n'existe pas

☐ f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$

☐ $\nabla f(0, 0)$ existe, mais f n'est pas différentiable en $(0, 0)$

Question 4 : Pour $a > 0$, soit

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ et } x + y + z \leq a\}.$$

Alors, pour tout $a > 0$, l'intégrale

$$\int_D x^2 dx dy dz$$

vaut

☒ $\frac{a^5}{60}$

☐ $\frac{a^3}{20}$

☐ $\frac{4\pi}{3} a^3$

☐ $\frac{a^5}{20}$

Question 5 : Soient

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \quad \text{et} \quad \tilde{D} = \{(r, \varphi) : r > 0, \varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\}.$$

Pour $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, on note par $\tilde{f} : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\tilde{f}(r, \varphi) = f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$.

Alors pour toute fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1(D)$, tout $(x, y) \in D$ et tout $(r, \varphi) \in \tilde{D}$ tels que $x = r \cos(\varphi)$ et $y = r \sin(\varphi)$, on a

☒ $\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \varphi)\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}(r, \varphi)\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2$

☐ $\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \varphi)\right)^2 + r^2 \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}(r, \varphi)\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2$

☐ $\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \varphi)\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}(r, \varphi)\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2$

☐ $\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \varphi)\right)^2 + r^2 \sin(\varphi) \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}(r, \varphi)\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2$

Question 6 : Soit $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq 0\}$ et soit $u : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$$u(x, y, z) = \left(x^2 + 1 + \sin(yz^2), \frac{y}{x}\right)$$

Alors la matrice jacobienne $J_u(1, 0, 1)$ vaut

☐ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ☒ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Question 7 : Soit $F :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(t) = \int_{t^{-1/2}}^{t^{3/2}} \frac{\sin(tx^2)}{x} dx.$$

Alors $F'(2)$ vaut

☐ $\sin(16) - \frac{1}{2} \sin(1)$ ☐ $\frac{\sin(16) - \sin(1)}{4}$

☐ $\frac{\sqrt{2}-1}{4} \sin(16) + \frac{1-2\sqrt{2}}{4} \sin(1)$ ☒ $\sin(16)$

Question 8 : Soit

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x \leq y^2 \leq 4\}$$

et soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = e^{y^3+1}.$$

Alors l'intégrale $\int_D f(x, y) dx dy$ vaut

☒ $\frac{1}{3}(e^9 - e)$ ☐ $e^8 - 1$ ☐ $\frac{1}{3}(e^9 + e)$ ☐ $e^8 + 1$

Question 9 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$(x^2 + 1) y'(x) + y(x) = 1$$

qui satisfait la condition initiale $y(0) = -3$ vérifie aussi

☐ $y(\tan(1)) = -1 - 3e$

☒ $y(\tan(1)) = 1 - 4e^{-1}$

☐ $y(\tan(1)) = -3e$

☐ $y(\tan(1)) = e - 4e^{-1}$

Question 10 : Soit

$$D = \left\{ (r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} \leq r \cos(\varphi) \leq 1 \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Alors l'intégrale

$$\int_D r^2 \sin(\varphi) dr d\varphi$$

est égale à l'intégrale

☐ $\int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 y dy \right) dx$

☒ $\int_0^1 \left(\int_0^{x^2} y dy \right) dx$

☐ $\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} xy dx \right) dy$

☐ $\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^2 + y^2} y dx \right) dy$

Question 11 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = e^{x^2 y - 1}.$$

Le polynôme de Taylor d'ordre 2 de f autour de $(1, 1)$ est

☐ $p_2(x, y) = 2(x - 1) + (y - 1) + 3(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + 6(x - 1)(y - 1)$

☐ $p_2(x, y) = 1 + 2x + y + 6x^2 + 4xy + \frac{1}{e} y^2$

☒ $p_2(x, y) = 1 + 2(x - 1) + (y - 1) + 3(x - 1)^2 + 4(x - 1)(y - 1) + \frac{1}{2} (y - 1)^2$

☐ $p_2(x, y) = 1 + 2(x - 1) + (y - 1)$

Question 12 : Soit $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 4)$ et soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y, z) = x^2 + \sin(xy) + z.$$

L'équation $f(x, y, z) = 5$ définit dans un voisinage de $(x_0, z_0) = (1, 4)$ une fonction $y = g(x, z)$ telle que $g(x_0, z_0) = y_0 = 0$ et $f(x, g(x, z), z) = 5$. De plus on a

☐ $\frac{\partial g}{\partial z}(1, 4) = 1$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(1, 4) = 4$

☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 4) = -2$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1, 4) = 0$

☒ $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 4) = -2$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1, 4) = 2$

☐ $\frac{\partial g}{\partial z}(1, 4) = -2$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(1, 4) = 0$

Question 13: La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'(x) = 4 - (y(x))^2$$

qui satisfait la condition initiale $y(0) = 0$ vérifie aussi

☐ $y\left(-\frac{1}{4}\right) = 2 \frac{e-1}{e+1}$

☒ $y\left(-\frac{1}{4}\right) = -2 \frac{e-1}{e+1}$

☐ $y\left(-\frac{1}{4}\right) = 2(e^2 - 1)$

☐ $y\left(-\frac{1}{4}\right) = -2 \frac{e+1}{e-1}$

Question 14: Soit S la surface

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2 \cos(\pi x) + x^2 y + 3e^{xz} + yz = 23\}.$$

L'équation du plan tangent à S au point $(3, 2, 0)$ est donnée par

☐ $9x - 12y + z = 36$

☐ $9x + 11y + 12z = 10$

☒ $12x + 9y + 11z = 54$

☐ $12x + 9y + 11z = 18$

Question 15: La solution $u(t)$ de l'équation différentielle

$$u''(t) - 6u'(t) + 9u(t) - 27t = 0$$

qui satisfait les conditions initiales $u(0) = 0$ et $u'(0) = 0$ vérifie aussi

☐ $u\left(\frac{2}{3}\right) = 0$

☒ $u\left(\frac{2}{3}\right) = 4$

☐ $u\left(\frac{2}{3}\right) = 5e^2 + 4$

☐ $u\left(\frac{2}{3}\right) = e^2$

Question 16: Pour $\tilde{D} =]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$ et $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$, soit $G : \tilde{D} \rightarrow D$ définie par

$$G(r, \varphi) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)).$$

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, une fonction de classe $C^1(D)$ et soit $\tilde{f} : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\tilde{f}(r, \varphi) = (f \circ G)(r, \varphi)$. Si

$$J_{\tilde{f}}(r, \varphi) = J_{f \circ G}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} 2r + \cos(\varphi) \sin(\varphi) & r(\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)) \end{pmatrix}$$

pour tout $(r, \varphi) \in \tilde{D}$, alors

☐ $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$

☐ $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$

☒ $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{4}$

☐ $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$

Question 17: La fonction

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 9y^2 - 8$$

☐ atteint un maximum local en $(0, 0)$

☐ n'atteint ni un maximum local ni un minimum local en $(0, 6)$

☒ atteint un maximum local en $(-2, 0)$

☐ atteint un minimum local en $(-2, 6)$

Question 18: La limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3y - 3xy^3 + x^5}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$$

☐ vaut 0

☐ vaut -3

☐ vaut -2

☒ n'existe pas

Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 19 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = 4 \sin(x) \cos(x)$. Alors le polynôme de Taylor d'ordre 2 de f autour de $(0, 0)$ est le polynôme $p_2(x, y) = 4x$.

☒ VRAI ☐ FAUX

Question 20 : Soit $D = [0, 1] \times [-1, 1]$. Alors

$$\int_D \sin(xy) \, dx \, dy = 0.$$

☒ VRAI ☐ FAUX

Question 21 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$, une fonction de classe C^2 et soit $\text{Hess}_f(\mathbf{a})$ la matrice hessienne de f en $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$. Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a}) = -2$ et si le déterminant de $\text{Hess}_f(\mathbf{a})$ vaut -3 , alors f admet un maximum local en $\mathbf{a}$.

☐ VRAI ☒ FAUX

Question 22 : Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $a < -16$. Alors l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \geq -25x^2 - 15y^2 > a\}$ est ouvert.

☒ VRAI ☐ FAUX

Question 23 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et soit S la surface

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}.$$

Si $f(0, 0) = 3$ et si f admet en $(0, 0)$ un minimum local, alors l'équation du plan tangent à S au point $(0, 0, 3)$ est donnée par $z = 3$.

☒ VRAI ☐ FAUX

Question 24 : Soit D un sous-ensemble compact non vide de $\mathbb{R}^2$ et soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = \cos(\cos(x - y^2))$. Alors f admet un maximum local.

☒ VRAI ☐ FAUX

Question 25 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$. Si la dérivée directionnelle de f en $\mathbf{p}$ existe suivant tout vecteur $\mathbf{v}$, alors f est différentiable en $\mathbf{p}$.

☐ VRAI ☒ FAUX

Question 26 : Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et $F \subset \mathbb{R}^n$ deux ensembles non vides. Si $E \subset F$, alors $\partial E \subset \partial F$.

☐ VRAI ☒ FAUX

Question 27: Soit $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$ on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos(\theta), t \sin(\theta)) = 2.$$

Alors f admet un prolongement par continuité au point $(0, 0)$.



VRAI



FAUX

Question 28: Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ un sous-ensemble ouvert non vide et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, une fonction de classe $C^2(E)$. Alors la fonction $\frac{\partial f}{\partial x} : E \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en tout point de E .



VRAI



FAUX