Durée : 144 minutes

Analyse II
Examen
Partie commune
Printemps 2019

Enoncé

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

$+3$ points si la réponse est correcte,

0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,

-1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

$+1$ point si la réponse est correcte,

0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,

-1 point si la réponse est incorrecte.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : La limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2|x|}{x^2+|x|+y^2}$$

- ☐ vaut 2
- ☐ n'existe pas
- ☐ vaut 1
- ☐ vaut 0

Question 2 : Soient $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ les fonctions définies par

$$f(x,y)=3x+5y^2 \qquad \text{et} \qquad g(x,y)=x^2+2y^4+2xy^2-13\,.$$

Alors, sous la contrainte $g(x,y)=0$,

- ☐ la fonction f atteint son maximum en exactement un point
- ☐ la fonction f atteint son maximum en $\big(1,\sqrt{2}\,\big)$
- ☐ la fonction f atteint son minimum en exactement deux points
- ☐ le minimum de la fonction f est positif

Question 3 : Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y)=x\left|x^3y-\frac{1}{3}\sin(x)\cos(x)\right|.$$

Alors

- ☐ f est différentiable en $(0,0)$, mais n'est pas différentiable en $(\pi,0)$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe, mais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'existe pas
- ☐ f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$
- ☐ $\nabla f(0,0)$ existe, mais f n'est pas différentiable en $(0,0)$

Question 4 : Pour $a>0$, soit

$$D=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0 \ \text{ et } \ x+y+z\leq a\big\}\,.$$

Alors, pour tout $a>0$, l'intégrale

$$\int_D x^2\,dx\,dy\,dz$$

vaut

- ☐ $\dfrac{a^5}{60}$
- ☐ $\dfrac{a^3}{20}$
- ☐ $\dfrac{4\pi}{3}a^3$
- ☐ $\dfrac{a^5}{20}$

Question 5 : Soient

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \qquad \text{et} \qquad \widetilde{D} = \left\{(r,\varphi) : r > 0,\ \varphi \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[\ \right\}.$$

Pour $f : D \to \mathbb{R}$, on note par $\widetilde{f} : \widetilde{D} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\widetilde{f}(r,\varphi) = f\big(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\big)$. Alors pour toute fonction $f : D \to \mathbb{R}$ de classe $C^1(D)$, tout $(x,y) \in D$ et tout $(r,\varphi) \in \widetilde{D}$ tels que $x = r\cos(\varphi)$ et $y = r\sin(\varphi)$, on a

- ☐ $\left(\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}(r,\varphi)\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial \varphi}(r,\varphi)\right)^2 = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2$
- ☐ $\left(\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}(r,\varphi)\right)^2 + r^2\left(\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial \varphi}(r,\varphi)\right)^2 = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2$
- ☐ $\left(\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}(r,\varphi)\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial \varphi}(r,\varphi)\right)^2 = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2$
- ☐ $\left(\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}(r,\varphi)\right)^2 + r^2\sin(\varphi)\left(\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial \varphi}(r,\varphi)\right)^2 = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2$

Question 6 : Soit $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq 0\}$ et soit $u : D \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$$u(x,y,z) = \left(x^2 + 1 + \sin\big(yz^2\big),\ \frac{y}{x}\right)$$

Alors la matrice jacobienne $J_u(1,0,1)$ vaut

☐ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Question 7 : Soit $F :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(t) = \int_{t^{-1/2}}^{t^{3/2}} \frac{\sin(tx^2)}{x}\, dx\,.$$

Alors $F'(2)$ vaut

☐ $\sin(16) - \dfrac{1}{2}\sin(1)$ ☐ $\dfrac{\sin(16) - \sin(1)}{4}$

☐ $\dfrac{\sqrt{2}-1}{4}\sin(16) + \dfrac{1-2\sqrt{2}}{4}\sin(1)$ ☐ $\sin(16)$

Question 8 : Soit

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x \leq y^2 \leq 4\}$$

et soit $f : D \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = e^{y^3+1}\,.$$

Alors l'intégrale $\displaystyle\int_D f(x,y)\,dx\,dy$ vaut

☐ $\frac{1}{3}\big(e^9 - e\big)$ ☐ $e^8 - 1$ ☐ $\frac{1}{3}\big(e^9 + e\big)$ ☐ $e^8 + 1$

Question 9 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$(x^2+1)\,y'(x)+y(x)=1$$

qui satisfait la condition initiale $y(0)=-3$ vérifie aussi

- ☐ $y\big(\tan(1)\big)=-1-3e$
- ☐ $y\big(\tan(1)\big)=1-4e^{-1}$
- ☐ $y\big(\tan(1)\big)=-3e$
- ☐ $y\big(\tan(1)\big)=e-4e^{-1}$

Question 10 : Soit

$$D=\left\{(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2 : 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\ \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}\le r\cos(\varphi)\le 1\right\}\subset\mathbb{R}^2 .$$

Alors l'intégrale

$$\int_D r^2\sin(\varphi)\,dr\,d\varphi$$

est égale à l'intégrale

- ☐ $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{x^2}^1 y\,dy\right)dx$
- ☐ $\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^{x^2} y\,dy\right)dx$
- ☐ $\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{y}} xy\,dx\right)dy$
- ☐ $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^2+y^2}\;y\,dx\right)dy$

Question 11 : Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y)=e^{x^2y-1}\,.$$

Le polynôme de Taylor d'ordre 2 de f autour de $(1,1)$ est

- ☐ $p_2(x,y)=2(x-1)+(y-1)+3(x-1)^2+(y-1)^2+6(x-1)(y-1)$
- ☐ $p_2(x,y)=1+2x+y+6x^2+4xy+\frac{1}{e}\,y^2$
- ☐ $p_2(x,y)=1+2(x-1)+(y-1)+3(x-1)^2+4(x-1)(y-1)+\frac{1}{2}\,(y-1)^2$
- ☐ $p_2(x,y)=1+2(x-1)+(y-1)$

Question 12 : Soit $(x_0,y_0,z_0)=(1,0,4)$ et soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y,z)=x^2+\sin(xy)+z\,.$$

L'équation $f(x,y,z)=5$ définit dans un voisinage de $(x_0,z_0)=(1,4)$ une fonction $y=g(x,z)$ telle que $g(x_0,z_0)=y_0=0$ et $f\big(x,g(x,z),z\big)=5$. De plus on a

- ☐ $\dfrac{\partial g}{\partial z}(1,4)=\ \ 1$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial z^2}(1,4)=4$
- ☐ $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,4)=-2$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,4)=0$
- ☐ $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,4)=-2$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,4)=2$
- ☐ $\dfrac{\partial g}{\partial z}(1,4)=-2$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial z^2}(1,4)=0$

Question 13 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'(x) = 4 - \big(y(x)\big)^2$$

qui satisfait la condition initiale $y(0) = 0$ vérifie aussi

- ☐ $y\left(-\frac{1}{4}\right) = 2\,\dfrac{e-1}{e+1}$
- ☐ $y\left(-\frac{1}{4}\right) = -2\,\dfrac{e-1}{e+1}$
- ☐ $y\left(-\frac{1}{4}\right) = 2\,(e^2 - 1)$
- ☐ $y\left(-\frac{1}{4}\right) = -2\,\dfrac{e+1}{e-1}$

Question 14 : Soit S la surface

$$S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2\cos(\pi x) + x^2 y + 3e^{xz} + yz = 23\,\big\}.$$

L'équation du plan tangent à S au point $(3, 2, 0)$ est donnée par

- ☐ $9x - 12y + z = 36$
- ☐ $9x + 11y + 12z = 10$
- ☐ $12x + 9y + 11z = 54$
- ☐ $12x + 9y + 11z = 18$

Question 15 : La solution $u(t)$ de l'équation différentielle

$$u''(t) - 6u'(t) + 9u(t) - 27\,t = 0$$

qui satisfait les conditions initiales $u(0) = 0$ et $u'(0) = 0$ vérifie aussi

- ☐ $u\left(\frac{2}{3}\right) = 0$
- ☐ $u\left(\frac{2}{3}\right) = 4$
- ☐ $u\left(\frac{2}{3}\right) = 5e^2 + 4$
- ☐ $u\left(\frac{2}{3}\right) = e^2$

Question 16 : Pour $\widetilde{D} = \,]0, +\infty[\, \times \,]0, 2\pi[$ et $D = \mathbb{R}^2 \backslash \big\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\big\}$, soit $G : \widetilde{D} \to D$ définie par

$$G(r, \varphi) = \big(r\cos(\varphi),\, r\sin(\varphi)\big)\,.$$

Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, une fonction de classe $C^1(D)$ et soit $\widetilde{f} : \widetilde{D} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\widetilde{f}(r, \varphi) = (f \circ G)(r, \varphi)$. Si

$$J_{\widetilde{f}}(r, \varphi) = J_{f \circ G}(r, \varphi) = \Big(\, 2r + \cos(\varphi)\sin(\varphi) \quad r\big(\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)\big)\,\Big)$$

pour tout $(r, \varphi) \in \widetilde{D}$, alors

- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{5\sqrt{2}}{4}$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 1$

Question 17 : La fonction

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 9y^2 - 8$$

- ☐ atteint un maximum local en $(0, 0)$
- ☐ n'atteint ni un maximum local ni un minimum local en $(0, 6)$
- ☐ atteint un maximum local en $(-2, 0)$
- ☐ atteint un minimum local en $(-2, 6)$

Question 18 : La limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y - 3xy^3 + x^5}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$$

☐ vaut 0 ☐ vaut -3 ☐ vaut -2 ☐ n'existe pas

Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 19 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = 4\sin(x)\cos(x)$. Alors le polynôme de Taylor d'ordre 2 de f autour de $(0, 0)$ est le polynôme $p_2(x, y) = 4x$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 20 : Soit $D = [0, 1] \times [-1, 1]$. Alors

$$\int_D \sin(xy)\, dx\, dy = 0\,.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 21 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$, une fonction de classe C^2 et soit $\mathrm{Hess}_f(\boldsymbol{a})$ la matrice hessienne de f en $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$. Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{a}) = -2$ et si le déterminant de $\mathrm{Hess}_f(\boldsymbol{a})$ vaut -3, alors f admet un maximum local en $\boldsymbol{a}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 22 : Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $a < -16$. Alors l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \geq -25x^2 - 15y^2 > a\}$ est ouvert.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 23 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et soit S la surface

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}\,.$$

Si $f(0, 0) = 3$ et si f admet en $(0, 0)$ un minimum local, alors l'équation du plan tangent à S au point $(0, 0, 3)$ est donnée par $z = 3$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 24 : Soit D un sous-ensemble compact non vide de $\mathbb{R}^2$ et soit $f : D \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = \cos\big(\cos(x - y^2)\big)$. Alors f admet un maximum local.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 25 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$. Si la dérivée directionnelle de f en $\boldsymbol{p}$ existe suivant tout vecteur $\boldsymbol{v}$, alors f est différentiable en $\boldsymbol{p}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 26 : Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et $F \subset \mathbb{R}^n$ deux ensembles non vides. Si $E \subset F$, alors $\partial E \subset \partial F$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 27 : Soit $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$ on a
$$\lim_{t \to 0} f\big(t\cos(\theta), t\sin(\theta)\big) = 2\,.$$
Alors f admet un prolongement par continuité au point $(0,0)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 28 : Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ un sous-ensemble ouvert non vide et $f : E \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$, une fonction de classe $C^2(E)$. Alors la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x} : E \to \mathbb{R}$ est différentiable en tout point de E.

☐ VRAI ☐ FAUX