Durée : 144 minutes

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Analyse II
Examen
Partie commune
Printemps 2018

Réponses

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

$+3$ points si la réponse est correcte,

0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,

-1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

$+1$ point si la réponse est correcte,

0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,

-1 point si la réponse est incorrecte.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soient les sous-ensembles

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z \le 0\} \qquad \text{et} \qquad B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}.$$

Alors l'ensemble non vide $A \cap B \subset \mathbb{R}^3$ est

- ☐ ouvert et non borné
- ☐ fermé et non borné
- ☐ ouvert et borné
- ■ fermé et borné

Question 2 : Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0,\ |y| \le \min\{1, 2-x\}\}$. Alors l'intégrale

$$\int_D xy^2 \, dx \, dy$$

vaut

☐ $\frac{16}{15}$ ☐ $\frac{2}{15}$ ■ $\frac{8}{15}$ ☐ $\frac{4}{15}$

Question 3 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{2+\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Alors

- ☐ la fonction f est continue en tout point $(x,y) \neq (0,0)$
- ■ la fonction f est continue en $(0,0)$
- ☐ $\lim_{x\to 0} f(x,0) \neq \lim_{y\to 0} f(0,y)$
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe mais $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ n'existe pas

Question 4 : Soit

$$I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 \frac{x^{37}}{1+y^{20}} \, dy \right) dx.$$

Alors

☐ $I = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{10}$ ■ $I = \frac{\log(2)}{760}$ ☐ $I = \frac{\log(2)}{38}$ ☐ $I = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{10}$

Question 5 : Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$$g(u,v) = \big(-v,\, u\big)$$

et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ telle que

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + y^2 & 2xy + e^{\,y} \end{pmatrix}.$$

Alors la fonction

$$\begin{aligned} h :\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u,v) &\longmapsto h(u,v) \end{aligned}$$

définie par $h = f \circ g$ satisfait

- ☐ $\dfrac{\partial h}{\partial u}(0,1) = -1$
- ☐ $\dfrac{\partial h}{\partial v}(0,1) = -1$
- ■ $\dfrac{\partial h}{\partial v}(0,1) = -3$
- ☐ $\dfrac{\partial h}{\partial u}(0,1) = -3$

Question 6 : Soit S la surface

$$S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 + 4z^2 = 6\big\}.$$

L'équation du plan tangent à S au point $(-1,1,1)$ est donnée par

- ☐ $4x - 2y - 8z - 14 = 0$
- ☐ $x - y - 4z + 6 = 0$
- ■ $2x - y - 4z + 7 = 0$
- ☐ $4x - 2y - 8z + 8 = 0$

Question 7 : Soit $(x_0, y_0) = \big(\sqrt{\pi/6}\,,\ \sqrt{2\pi/3}\,\big)$ et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \sin(x^2) + \cos(y^2).$$

L'équation $f(x,y) = 0$ définit dans un voisinage de x_0 une fonction $y = g(x)$ telle que $g(x_0) = y_0$ et $f\big(x, g(x)\big) = 0$. De plus, on a

- ☐ $g'(x_0) = \dfrac{\pi}{2}$
- ☐ $g'(x_0) = -\dfrac{\pi}{2}$
- ■ $g'(x_0) = \dfrac{1}{2}$
- ☐ $g'(x_0) = -\dfrac{1}{2}$

Question 8 : Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(t) = \int_0^{t^2} e^{te^x}\, dx.$$

Alors on a

- ■ $F'(1) = 3e^e - e$
- ☐ $F'(1) = 2e^e - e$
- ☐ $F'(1) = 4e^e - e$
- ☐ $F'(1) = e^e - e$

Question 9 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'(x) + y(x) = x^2 e^{-x}$$

qui satisfait la condition initiale $y(1) = 0$ vérifie aussi

- ☐ $y(-2) = -\frac{5}{4}\big(e^2 - e^{-4}\big)$
- ☐ $y(-2) = -\frac{1}{4}\big(e^4 - 13e^{-2}\big)$
- ■ $y(-2) = -3e^2$
- ☐ $y(-2) = -3e^{-2}$

Question 10 : Soit $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4\,,\ x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ z \leq 0\}$.
Alors l'intégrale

$$\int_D \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz$$

vaut

- ■ $-\frac{31}{40}$
- ☐ 0
- ☐ $-\frac{4}{5}$
- ☐ $-\frac{31}{30}$

Question 11 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 - 5xy\,.$$

Alors

- ☐ f admet un maximum local en $(0,0,0)$
- ☐ f admet un minimum local en $(0,0,0)$
- ■ f n'admet pas d'extremum local en $(0,0,0)$
- ☐ $(0,0,0)$ n'est pas un point stationnaire de f

Question 12 : Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < \frac{1}{4}\right\}$ et soit $f : D \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{1}{1-x+y+xy}\,.$$

Alors le polynôme de Taylor d'ordre deux de f autour du point $(0,0)$ est

- ☐ $p_2(x,y) = 1 + x - y + x^2 - 4xy + y^2$
- ☐ $p_2(x,y) = 1 + x - y + x^2 - 2xy + y^2$
- ☐ $p_2(x,y) = 1 + x - y + x^2 - xy + y^2$
- ■ $p_2(x,y) = 1 + x - y + x^2 - 3xy + y^2$

Question 13 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'(x) + 6x^5\big(y(x)\big)^2 = 0$$

qui satisfait la condition initiale $y(1) = \frac{1}{3}$ vérifie aussi

- ☐ $y(\sqrt{2}) = \frac{1}{3\,e^7}$
- ☐ $y(\sqrt{2}) = -\frac{13}{24}$
- ☐ $y(\sqrt{2}) = -\frac{1}{4}$
- ■ $y(\sqrt{2}) = \frac{1}{10}$

Question 14 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Alors

- ☐ f est différentiable en $(0,0)$, mais f n'est pas de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$
- ☐ les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ n'existent pas
- ■ les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent, mais f n'est pas différentiable en $(0,0)$
- ☐ f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$

Question 15 : La solution $u(t)$ de l'équation différentielle

$$u''(t) - 2u'(t) + 5u(t) = 17\sin(2t)$$

qui satisfait les conditions initiales $u(0) = 1$ et $u'(0) = 1$ vérifie aussi

■ $u(\pi) = 4 - 3e^{\pi}$ ☐ $u(\pi) = 4$ ☐ $u(\pi) = -4 + 5e^{\pi}$ ☐ $u(\pi) = 4 - 4e^{\pi}$

Question 16 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) = \Big((1+x^2)^y \,,\, y^2 + x \Big)\,.$$

Alors la matrice jacobienne de f évaluée en $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ est

- ■ $J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} (1+x^2)^{y-1} 2xy & (1+x^2)^y \log(1+x^2) & 0 \\ 1 & 2y & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} (1+x^2)^{y-1} 2xy & (1+x^2)^y \log(1+x^2)\, 2x \\ 1 & 2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} (1+x^2)^{y-1} 2xy & (1+x^2)^y \log(1+x^2) \\ 1 & 2y \end{pmatrix}$
- ☐ $J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} (1+x^2)^{y-1} 2xy & (1+x^2)^y \log(1+x^2)\, 2x & 0 \\ 1 & 2y & 0 \end{pmatrix}$

Question 17 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = x^3 y^3$$

et soit $g(x,y) = x^4 + 16y^4 - 32$. Alors, sous la contrainte $g(x,y) = 0$,

- ☐ la fonction f atteint son minimum en un seul point
- ☐ la fonction f atteint son maximum en $\big(\sqrt[4]{7}\,,\, \sqrt{5}/2\big)$
- ☐ la fonction f atteint son maximum en exactement 4 points
- ■ la fonction f atteint son minimum en $(-2,1)$

Question 18 : La limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} + \dfrac{x y^3}{x^2+y^6} \right)$

☐ vaut 1 ☐ vaut 2 ■ n'existe pas ☐ vaut 0

Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 19 : Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble non vide, fermé et borné et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors

$$-\int_D \left|f(\boldsymbol{x})\right| d\boldsymbol{x} \;\leq\; \int_D f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \;\leq\; \int_D \left|f(\boldsymbol{x})\right| d\boldsymbol{x}$$

si les intégrales existent.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 20 : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $\big(\boldsymbol{a}_k\big)_{k\geq 1}$ une suite dans $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n\,.$$

Si $\lim\limits_{k\to+\infty} f(\boldsymbol{a}_k) = 1$, alors $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = 1$.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 21 : Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et soit $\overline{E}$ son adhérence. Si $E = \overline{E}$, alors le bord de E est vide.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 22 : Si y_1 et y_2 sont deux solutions sur un intervalle ouvert non vide $I \subset \mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'(x) - \cos\big(y(x)\big) = 0$, alors $y_1 + y_2$ est aussi une solution de cette équation sur I.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 23 : Si la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ admet en $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ un minimum local, alors la fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $g(\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$ admet en $\boldsymbol{a}$ un maximum local.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 24 : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction et soit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Si les dérivées partielles $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$ existent pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$ et $j \in \{1, \ldots, n\}$, alors f est différentiable en $\boldsymbol{a}$.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 25 : Soit $D = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 \leq 1 + y^2 + z^2\big\}$. Si $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur D, alors f est bornée.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 26 : Soient $(\boldsymbol{u}_k)_{k\geq 1}$ et $(\boldsymbol{v}_k)_{k\geq 1}$ deux suites dans $\mathbb{R}^n$.
Si $(\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{v}_k)_{k\geq 1}$ est une suite convergente alors $(\boldsymbol{u}_k)_{k\geq 1}$ et $(\boldsymbol{v}_k)_{k\geq 1}$ convergent aussi.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 27 : Si $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, alors $\int_D e^{x^2}\, dx\, dy \leq \pi e$.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 28 : Soit $(\boldsymbol{x}_k)_{k\geq 1}$ une suite dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\|\boldsymbol{x}_k\| = 1$ pour tout $k \geq 1$.
Alors il existe $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ et $\lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}$.

☐ VRAI ■ FAUX