

Analyse II

Examen

Partie commune

Printemps 2018

Enoncé

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

- +3 points si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
- −1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

- +1 point si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
- −1 point si la réponse est incorrecte.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures.

Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 : Soient les sous-ensembles

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 0\} \quad \text{et} \quad B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Alors l'ensemble non vide $A \cap B \subset \mathbb{R}^3$ est

☐ ouvert et non borné

☐ fermé et non borné

☐ ouvert et borné

☐ fermé et borné

Question 2 : Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, |y| \leq \min\{1, 2 - x\}\}$. Alors l'intégrale

$$\int_D xy^2 dx dy$$

vaut

☐ $\frac{16}{15}$

☐ $\frac{2}{15}$

☐ $\frac{8}{15}$

☐ $\frac{4}{15}$

Question 3 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Alors

☐ la fonction f est continue en tout point $(x, y) \neq (0, 0)$

☐ la fonction f est continue en $(0, 0)$

☐ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) \neq \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y)$

☐ $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe mais $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ n'existe pas

Question 4 : Soit

$$I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 \frac{x^{37}}{1 + y^{20}} dy \right) dx.$$

Alors

☐ $I = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{10}$

☐ $I = \frac{\log(2)}{760}$

☐ $I = \frac{\log(2)}{38}$

☐ $I = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{10}$

Question 5 : Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$$g(u, v) = (-v, u)$$

et soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ telle que

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + y^2 & 2xy + e^y \end{pmatrix}.$$

Alors la fonction

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto h(u, v) \end{aligned}$$

définie par $h = f \circ g$ satisfait

$$\begin{array}{llll} \square \frac{\partial h}{\partial u}(0, 1) = -1 & \square \frac{\partial h}{\partial v}(0, 1) = -1 & \square \frac{\partial h}{\partial v}(0, 1) = -3 & \square \frac{\partial h}{\partial u}(0, 1) = -3 \end{array}$$

Question 6 : Soit S la surface

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 + 4z^2 = 6\}.$$

L'équation du plan tangent à S au point $(-1, 1, 1)$ est donnée par

$$\begin{array}{ll} \square 4x - 2y - 8z - 14 = 0 & \square x - y - 4z + 6 = 0 \\ \square 2x - y - 4z + 7 = 0 & \square 4x - 2y - 8z + 8 = 0 \end{array}$$

Question 7 : Soit $(x_0, y_0) = (\sqrt{\pi/6}, \sqrt{2\pi/3})$ et soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \sin(x^2) + \cos(y^2).$$

L'équation $f(x, y) = 0$ définit dans un voisinage de x_0 une fonction $y = g(x)$ telle que $g(x_0) = y_0$ et $f(x, g(x)) = 0$. De plus, on a

$$\begin{array}{llll} \square g'(x_0) = \frac{\pi}{2} & \square g'(x_0) = -\frac{\pi}{2} & \square g'(x_0) = \frac{1}{2} & \square g'(x_0) = -\frac{1}{2} \end{array}$$

Question 8 : Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(t) = \int_0^{t^2} e^{te^x} dx.$$

Alors on a

$$\begin{array}{llll} \square F'(1) = 3e^e - e & \square F'(1) = 2e^e - e & \square F'(1) = 4e^e - e & \square F'(1) = e^e - e \end{array}$$

Question 9 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'(x) + y(x) = x^2 e^{-x}$$

qui satisfait la condition initiale $y(1) = 0$ vérifie aussi

$$\begin{array}{ll} \square y(-2) = -\frac{5}{4}(e^2 - e^{-4}) & \square y(-2) = -\frac{1}{4}(e^4 - 13e^{-2}) \\ \square y(-2) = -3e^2 & \square y(-2) = -3e^{-2} \end{array}$$

Question 10: Soit $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

Alors l'intégrale

$$\int_D \frac{xyz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz$$

vaut

☐ $-\frac{31}{40}$

☐ 0

☐ $-\frac{4}{5}$

☐ $-\frac{31}{30}$

Question 11: Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 - 5xy.$$

Alors

☐ f admet un maximum local en $(0, 0, 0)$

☐ f admet un minimum local en $(0, 0, 0)$

☐ f n'admet pas d'extremum local en $(0, 0, 0)$

☐ $(0, 0, 0)$ n'est pas un point stationnaire de f

Question 12: Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \frac{1}{4}\}$ et soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{1}{1 - x + y + xy}.$$

Alors le polynôme de Taylor d'ordre deux de f autour du point $(0, 0)$ est

☐ $p_2(x, y) = 1 + x - y + x^2 - 4xy + y^2$

☐ $p_2(x, y) = 1 + x - y + x^2 - 2xy + y^2$

☐ $p_2(x, y) = 1 + x - y + x^2 - xy + y^2$

☐ $p_2(x, y) = 1 + x - y + x^2 - 3xy + y^2$

Question 13: La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'(x) + 6x^5(y(x))^2 = 0$$

qui satisfait la condition initiale $y(1) = \frac{1}{3}$ vérifie aussi

☐ $y(\sqrt{2}) = \frac{1}{3e^7}$

☐ $y(\sqrt{2}) = -\frac{13}{24}$

☐ $y(\sqrt{2}) = -\frac{1}{4}$

☐ $y(\sqrt{2}) = \frac{1}{10}$

Question 14 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Alors

- ☐ f est différentiable en $(0, 0)$, mais f n'est pas de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$
- ☐ les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ n'existent pas
- ☐ les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existent, mais f n'est pas différentiable en $(0, 0)$
- ☐ f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$

Question 15 : La solution $u(t)$ de l'équation différentielle

$$u''(t) - 2u'(t) + 5u(t) = 17 \sin(2t)$$

qui satisfait les conditions initiales $u(0) = 1$ et $u'(0) = 1$ vérifie aussi

- ☐ $u(\pi) = 4 - 3e^\pi$
- ☐ $u(\pi) = 4$
- ☐ $u(\pi) = -4 + 5e^\pi$
- ☐ $u(\pi) = 4 - 4e^\pi$

Question 16 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$$f(x, y, z) = \left((1 + x^2)^y, y^2 + x \right).$$

Alors la matrice jacobienne de f évaluée en $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est

- ☐ $J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} (1 + x^2)^{y-1} 2xy & (1 + x^2)^y \log(1 + x^2) & 0 \\ 1 & 2y & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} (1 + x^2)^{y-1} 2xy & (1 + x^2)^y \log(1 + x^2) 2x \\ 1 & 2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} (1 + x^2)^{y-1} 2xy & (1 + x^2)^y \log(1 + x^2) \\ 1 & 2y \end{pmatrix}$
- ☐ $J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} (1 + x^2)^{y-1} 2xy & (1 + x^2)^y \log(1 + x^2) 2x & 0 \\ 1 & 2y & 0 \end{pmatrix}$

Question 17 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = x^3 y^3$$

et soit $g(x, y) = x^4 + 16y^4 - 32$. Alors, sous la contrainte $g(x, y) = 0$,

- ☐ la fonction f atteint son minimum en un seul point
- ☐ la fonction f atteint son maximum en $(\sqrt[4]{7}, \sqrt{5}/2)$
- ☐ la fonction f atteint son maximum en exactement 4 points
- ☐ la fonction f atteint son minimum en $(-2, 1)$

Question 18: La limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} + \frac{xy^3}{x^2 + y^6} \right)$

☐ vaut 1

☐ vaut 2

☐ n'existe pas

☐ vaut 0

Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 19 : Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble non vide, fermé et borné et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors

$$-\int_D |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \leq \int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \int_D |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x}$$

si les intégrales existent.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 20 : Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $(\mathbf{a}_k)_{k \geq 1}$ une suite dans $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{a}_k = \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n.$$

Si $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(\mathbf{a}_k) = 1$, alors $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = 1$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 21 : Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et soit $\bar{E}$ son adhérence. Si $E = \bar{E}$, alors le bord de E est vide.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 22 : Si y_1 et y_2 sont deux solutions sur un intervalle ouvert non vide $I \subset \mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'(x) - \cos(y(x)) = 0$, alors $y_1 + y_2$ est aussi une solution de cette équation sur I .

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 23 : Si la fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ admet en $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ un minimum local, alors la fonction $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$ admet en $\mathbf{a}$ un maximum local.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 24 : Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction et soit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Si les dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a})$ existent pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$, alors f est différentiable en $\mathbf{a}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 25 : Soit $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 \leq 1 + y^2 + z^2\}$. Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur D , alors f est bornée.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 26: Soient $(\mathbf{u}_k)_{k \geq 1}$ et $(\mathbf{v}_k)_{k \geq 1}$ deux suites dans $\mathbb{R}^n$.

Si $(\mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k)_{k \geq 1}$ est une suite convergente alors $(\mathbf{u}_k)_{k \geq 1}$ et $(\mathbf{v}_k)_{k \geq 1}$ convergent aussi.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 27: Si $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, alors $\int_D e^{x^2} dx dy \leq \pi e$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 28: Soit $(\mathbf{x}_k)_{k \geq 1}$ une suite dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\|\mathbf{x}_k\| = 1$ pour tout $k \geq 1$.

Alors il existe $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|\mathbf{x}\| = 1$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$.

☐ VRAI ☐ FAUX