

Analyse II

Examen

Partie commune

Printemps 2017

Réponses

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

- +3 points si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
- −1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

- +1 point si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
- −1 point si la réponse est incorrecte.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures.
Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'(x) + 3x^2 y(x) = -6x^2 e^{-x^3}$$

pour $x \in \mathbb{R}$ qui satisfait la condition initiale $y(1) = 0$ vérifie aussi

- ☒ $y(0) = 2$ ☐ $y(0) = -2$ ☐ $y(0) = e^2 - 1$ ☐ $y(0) = 1 - e^{-2}$

Question 2 : Soit $\gamma : [3, 8] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la courbe définie par

$$\gamma(t) = \left(3t, 2t^{3/2} \right).$$

La longueur de la courbe est

- ☐ 45 ☐ 540 ☒ 38 ☐ 3

Question 3 : Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \log(4 - (x + y)^2),$$

où $D \subset \mathbb{R}^2$ est le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel l'expression $f(x, y)$ est bien définie.
Alors

- ☒ l'ensemble D n'est ni fermé ni borné
☐ l'ensemble D est borné mais pas fermé
☐ l'ensemble D est fermé et borné
☐ l'ensemble D est fermé mais pas borné

Question 4 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y, z) = (1 + x) y^2 |z|^3.$$

Alors la dérivée directionnelle de f au point $(0, 1, 1)$ suivant le vecteur $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ est égale à

- ☒ $2\sqrt{3}$ ☐ $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ ☐ -4 ☐ 6

Question 5 : Soient $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ et $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la fonction et le champ de vecteurs définis par

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{et} \quad \mathbf{v}(x, y, z) = \left(\frac{1}{2} x^2, \frac{1}{2} y^2, \frac{1}{2} z^2 \right).$$

Alors la fonction

$$g = \operatorname{div}(f \mathbf{v}) - f \operatorname{div}(\mathbf{v})$$

satisfait, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

- ☐ $g(x, y, z) = f(x^2, y^2, z^2)$
☒ $g(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$
☐ $g(x, y, z) = 2 \langle \nabla f, \mathbf{v} \rangle(x, y, z)$, avec $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$
☐ $g(x, y, z) = f(x, y, z)$

Question 6 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5 + xy^4}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Alors

☐ f n'est pas continue en $(0, 0)$

☒ $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existent mais f n'est pas différentiable en $(0, 0)$

☐ f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$

☐ f est continue en $(0, 0)$, mais $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ n'existent pas

Question 7 : La solution $u(t)$ de l'équation différentielle

$$u''(t) + 2u'(t) + u(t) = e^{-t}$$

pour $t \in \mathbb{R}$ qui satisfait les conditions initiales $u(0) = 1$ et $u'(0) = 0$ vérifie aussi

☒ $u(-1) = \frac{1}{2}e$

☐ $u(-1) = \frac{5}{2}e$

☐ $u(-1) = e^{-1} - e^2 + \frac{1}{2}e^{-1}$

☐ $u(-1) = -\frac{1}{2}e - e^{-1}$

Question 8 : Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, -x \leq y \leq x\}$.

Alors l'intégrale

$$\int_D (x^2 - y^2) dx dy$$

vaut

☒ $\frac{7}{4}$

☐ $\frac{175}{4}$

☐ $\frac{175\pi}{8}$

☐ $\frac{7\pi}{8}$

Question 9 : Soit D la région de $\mathbb{R}^3$ délimitée par les quatre plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ et $x + y + z = 1$. Alors l'intégrale

$$\int_D \sin(x + y + z) dx dy dz$$

vaut

☐ $\frac{1}{2} \cos(1)$

☐ $\sin(1) + 1$

☐ 1

☒ $\frac{1}{2} \cos(1) + \sin(1) - 1$

Question 10 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et soit

$$I = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{y}}^0 f(x, y) dx \right) dy + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x, y) dx \right) dy.$$

Alors

☐ $I = \int_{-1}^0 \left(\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{-x^2} f(x, y) dy \right) dx$

☐ $I = \int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy \right) dx$

☒ $I = \int_{-1}^0 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy \right) dx$

☐ $I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy \right) dx$

Question 11 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$$f(x, y, z) = (x^2y + e^{yz}, yz + x).$$

La matrice jacobienne de f évaluée en $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est

☐ $\begin{pmatrix} 2xy & x^2 + ze^{yz} & ye^{yz} \\ 2zy & z & y \end{pmatrix}$

☒ $\begin{pmatrix} 2xy & x^2 + ze^{yz} & ye^{yz} \\ 1 & z & y \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 2xy & 2zy \\ x^2 + ze^{yz} & z \\ ye^{yz} & y \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 2xy & 1 \\ x^2 + ze^{yz} & z \\ ye^{yz} & y \end{pmatrix}$

Question 12 : La solution $u(t)$ de l'équation différentielle

$$u'(t) + (u(t))^2 \sin(t) = 0$$

pour $t \in \mathbb{R}$ qui satisfait la condition initiale $u(0) = \frac{1}{4}$ vérifie aussi

☐ $u(\pi) = \frac{1}{4e^2}$

☐ $u(\pi) = \frac{1}{2}$

☐ $u(\pi) = \frac{e^2}{4}$

☒ $u(\pi) = \frac{1}{6}$

Question 13 : La fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2xy - y^2$$

possède

☐ trois points-selle

☐ un point-selle, un point de maximum local et un point de minimum local

☐ deux points-selle et un point de minimum local

☒ deux points-selle et un point de maximum local

Question 14 : Soient $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u + v \neq 0\}$ et soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(u, v) = \log(u^2 + 2uv + v^2).$$

Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow D$ une fonction différentiable telle que $g(0, 3) = (0, -3)$ et

$$J_g(0, 3) = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix},$$

où J_g est la matrice jacobienne de g . Si $h = f \circ g$, alors

☐ $\nabla h(0, 3) = (6, 0)$

☒ $\nabla h(0, 3) = (8, -2)$

☐ $\nabla h(0, 3) = (0, 6)$

☐ $\nabla h(0, 3) = (0, 0)$

Question 15 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

et soit

$$p_2(x, y) = a_0 + a_1(x - 1) + a_2(y + 1) + a_3(x - 1)^2 + a_4(x - 1)(y + 1) + a_5(y + 1)^2,$$

avec $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}$, le polynôme de Taylor d'ordre deux de f autour du point $(1, -1)$.

Alors le coefficient a_4 vaut

☐ $a_4 = 2$

☒ $a_4 = -1$

☐ $a_4 = 1$

☐ $a_4 = -2$

Question 16 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y, z) = (x - z)^2 + y^2$$

et soit $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$. Alors, sous la contrainte $g(x, y, z) = 0$,

☐ la fonction f atteint son maximum en un seul point

☐ la fonction f atteint son minimum en un seul point

☒ la fonction f atteint son maximum en $(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$

☐ la fonction f n'est pas bornée

Question 17 : Considérer les deux limites suivantes

$$(A) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^2}{x^4 + y^8}, \quad (B) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y}{x^4 + y^8}.$$

Alors

☐ les deux limites n'existent pas

☐ la limite (A) existe mais la limite (B) n'existe pas

☐ les deux limites existent

☒ la limite (B) existe mais la limite (A) n'existe pas

Question 18: L'ensemble

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{4} z^2 = 4 \right\}$$

est le graphe d'une fonction différentiable dans un voisinage du point $\mathbf{p} = (-1, 2, -2) \in S$.

L'équation du plan tangent à S en $\mathbf{p}$ est

☐ $x + y + z - 3 = 0$

☐ $x + y + z + 1 = 0$

☒ $2x - 2y + z + 8 = 0$

☐ $x + y + z - 1 = 0$

Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 19 : Soit $(\mathbf{u}_n)_{n \geq 1}$, avec $\mathbf{u}_n = (x_n, y_n, z_n) \in \mathbb{R}^3$, une suite divergente. Alors $(x_n)_{n \geq 1}$ est une suite divergente dans $\mathbb{R}$.

☐ VRAI ☒ FAUX

Question 20 : Soit $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur D telle que $\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = 1$. Alors $\lim_{t \rightarrow 0} f(t, 0) = 1$ et $\lim_{t \rightarrow 0} f(0, t) = 1$.

☐ VRAI ☒ FAUX

Question 21 : Soit $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ et soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction quelconque. Si f n'est pas bornée sur D , alors f n'est pas continue sur D .

☒ VRAI ☐ FAUX

Question 22 : Soient $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ deux fonctions différentiables. Alors en tout point $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ les matrices jacobienes de f , g et $f + g$ satisfont

$$J_{f+g}(\mathbf{p}) = J_f(\mathbf{p}) + J_g(\mathbf{p}).$$

☒ VRAI ☐ FAUX

Question 23 : Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle qu'au point $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ la dérivée directionnelle existe suivant tout vecteur unité $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Alors f est différentiable en $\mathbf{p}$.

☐ VRAI ☒ FAUX

Question 24 : Soit $y(x)$ une solution de l'équation différentielle linéaire inhomogène du deuxième ordre $y''(x) + x^2 y'(x) = 4$. Alors pour tout $C \in \mathbb{R}$, la fonction $y_1(x) = y(x) + C$ est aussi une solution de cette équation différentielle.

☒ VRAI ☐ FAUX

Question 25 : Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2(\mathbb{R}^n)$. Alors f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^n$.

☒ VRAI ☐ FAUX

Question 26 : Soit $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction différentiable. Alors la fonction composée $f = g \circ g$ est différentiable, et en tout point $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$, les matrices jacobienes de f et g satisfont

$$\det J_f(\mathbf{p}) = (\det J_g(\mathbf{p}))^2.$$

☐ VRAI ☒ FAUX

Question 27 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx \leq \int_0^2 \left(\int_0^2 f(x, y) dy \right) dx.$$

☐ VRAI ☒ FAUX

Question 28 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction de classe $C^2(\mathbb{R}^3)$. Alors en tout point $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ la matrice jacobienne $J_f(p)$ est une matrice symétrique.

☐ VRAI ☒ FAUX