Durée : 144 minutes

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Analyse II
Examen

Partie commune

Printemps 2017

Enoncé

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

$+3$ points si la réponse est correcte,

0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,

-1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

$+1$ point si la réponse est correcte,

0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,

-1 point si la réponse est incorrecte.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'(x) + 3x^2 y(x) = -6x^2\, e^{-x^3}$$

pour $x \in \mathbb{R}$ qui satisfait la condition initiale $y(1) = 0$ vérifie aussi

☐ $y(0) = 2$ ☐ $y(0) = -2$ ☐ $y(0) = e^2 - 1$ ☐ $y(0) = 1 - e^{-2}$

Question 2 : Soit $\gamma : [3, 8] \to \mathbb{R}^2$ la courbe définie par

$$\gamma(t) = \left(3t,\, 2t^{3/2}\right).$$

La longueur de la courbe est

☐ 45 ☐ 540 ☐ 38 ☐ 3

Question 3 : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \log\left(4 - (x+y)^2\right),$$

où $D \subset \mathbb{R}^2$ est le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel l'expression $f(x, y)$ est bien définie. Alors

☐ l'ensemble D n'est ni fermé ni borné

☐ l'ensemble D est borné mais pas fermé

☐ l'ensemble D est fermé et borné

☐ l'ensemble D est fermé mais pas borné

Question 4 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y, z) = (1 + x)\, y^2\, |z|^3 .$$

Alors la derivée directionnelle de f au point $(0, 1, 1)$ suivant le vecteur $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ est égale à

☐ $2\sqrt{3}$ ☐ $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ☐ -4 ☐ 6

Question 5 : Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la fonction et le champ de vecteurs définis par

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{v}(x, y, z) = \left(\tfrac{1}{2}\, x^2,\, \tfrac{1}{2}\, y^2,\, \tfrac{1}{2}\, z^2\right).$$

Alors la fonction

$$g = \operatorname{div}(f\, \boldsymbol{v}) - f \operatorname{div}(\boldsymbol{v})$$

satisfait, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

☐ $g(x, y, z) = f\left(x^2, y^2, z^2\right)$

☐ $g(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$

☐ $g(x, y, z) = 2\langle \nabla f, \boldsymbol{v}\rangle(x, y, z)$, avec $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$

☐ $g(x, y, z) = f(x, y, z)$

Question 6 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 + xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Alors

- ☐ f n'est pas continue en $(0,0)$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent mais f n'est pas différentiable en $(0,0)$
- ☐ f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$
- ☐ f est continue en $(0,0)$, mais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ n'existent pas

Question 7 : La solution $u(t)$ de l'équation différentielle

$$u''(t) + 2u'(t) + u(t) = e^{-t}$$

pour $t \in \mathbb{R}$ qui satisfait les conditions initiales $u(0) = 1$ et $u'(0) = 0$ vérifie aussi

- ☐ $u(-1) = \frac{1}{2}\,e$
- ☐ $u(-1) = \frac{5}{2}\,e$
- ☐ $u(-1) = e^{-1} - e^2 + \frac{1}{2}\,e^{-1}$
- ☐ $u(-1) = -\frac{1}{2}\,e - e^{-1}$

Question 8 : Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3 \leq x^2 + y^2 \leq 4\,,\ x \geq 0\,,\ -x \leq y \leq x\right\}$.
Alors l'intégrale

$$\int_D \left(x^2 - y^2\right) dx\, dy$$

vaut

- ☐ $\dfrac{7}{4}$
- ☐ $\dfrac{175}{4}$
- ☐ $\dfrac{175\pi}{8}$
- ☐ $\dfrac{7\pi}{8}$

Question 9 : Soit D la région de $\mathbb{R}^3$ délimitée par les quatre plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ et $x + y + z = 1$. Alors l'intégrale

$$\int_D \sin(x+y+z)\, dx\, dy\, dz$$

vaut

- ☐ $\frac{1}{2}\cos(1)$
- ☐ $\sin(1) + 1$
- ☐ 1
- ☐ $\frac{1}{2}\cos(1) + \sin(1) - 1$

Question 10 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit

$$I = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)\, dx \right) dy + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)\, dx \right) dy\,.$$

Alors

- ☐ $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} \left(\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{-x^2} f(x,y)\, dy \right) dx$
- ☐ $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\, dy \right) dx$
- ☐ $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} \left(\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\, dy \right) dx$
- ☐ $I = \displaystyle\int_{0}^{1} \left(\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\, dy \right) dx$

Question 11 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) = \left(x^2 y + e^{yz},\, yz + x\right).$$

La matrice jacobienne de f évaluée en $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ est

- ☐ $\begin{pmatrix} 2xy & x^2 + ze^{yz} & ye^{yz} \\ 2zy & z & y \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 2xy & x^2 + ze^{yz} & ye^{yz} \\ 1 & z & y \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 2xy & 2zy \\ x^2 + ze^{yz} & z \\ ye^{yz} & y \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 2xy & 1 \\ x^2 + ze^{yz} & z \\ ye^{yz} & y \end{pmatrix}$

Question 12 : La solution $u(t)$ de l'équation différentielle

$$u'(t) + \big(u(t)\big)^2 \sin(t) = 0$$

pour $t \in \mathbb{R}$ qui satisfait la condition initiale $u(0) = \frac{1}{4}$ vérifie aussi

- ☐ $u(\pi) = \dfrac{1}{4e^2}$
- ☐ $u(\pi) = \dfrac{1}{2}$
- ☐ $u(\pi) = \dfrac{e^2}{4}$
- ☐ $u(\pi) = \dfrac{1}{6}$

Question 13 : La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2xy - y^2$$

possède

- ☐ trois points-selle
- ☐ un point-selle, un point de maximum local et un point de minimum local
- ☐ deux points-selle et un point de minimum local
- ☐ deux points-selle et un point de maximum local

Question 14 : Soient $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u + v \neq 0\}$ et soit $f : D \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(u,v) = \log\big(u^2 + 2uv + v^2\big)\,.$$

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to D$ une fonction différentiable telle que $g(0,3) = \big(0,\,-3\big)$ et

$$J_g(0,3) = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix},$$

où J_g est la matrice jacobienne de g. Si $h = f \circ g$, alors

- ☐ $\nabla h(0,3) = \big(6,\,0\big)$
- ☐ $\nabla h(0,3) = \big(8,\,-2\big)$
- ☐ $\nabla h(0,3) = \big(0,\,6\big)$
- ☐ $\nabla h(0,3) = \big(0,\,0\big)$

Question 15 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

et soit

$$p_2(x,y) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(y+1) + a_3(x-1)^2 + a_4(x-1)(y+1) + a_5(y+1)^2\,,$$

avec $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}$, le polynôme de Taylor d'ordre deux de f autour du point $(1,-1)$. Alors le coefficient a_4 vaut

☐ $a_4 = 2$ ☐ $a_4 = -1$ ☐ $a_4 = 1$ ☐ $a_4 = -2$

Question 16 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) = (x-z)^2 + y^2$$

et soit $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$. Alors, sous la contrainte $g(x,y,z) = 0$,

- ☐ la fonction f atteint son maximum en un seul point
- ☐ la fonction f atteint son minimum en un seul point
- ☐ la fonction f atteint son maximum en $\big(\sqrt{2}\,,\,0\,,\,-\sqrt{2}\big)$
- ☐ la fonction f n'est pas bornée

Question 17 : Considérer les deux limites suivantes

$$\text{(A)} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^4+y^8}\,, \qquad\qquad \text{(B)} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y}{x^4+y^8}\,.$$

Alors

- ☐ les deux limites n'existent pas
- ☐ la limite (A) existe mais la limite (B) n'existe pas
- ☐ les deux limites existent
- ☐ la limite (B) existe mais la limite (A) n'existe pas

Question 18 : L'ensemble

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{1}{2}\, y^2 + \frac{1}{4}\, z^2 = 4 \right\}$$

est le graphe d'une fonction différentiable dans un voisinage du point $\boldsymbol{p} = (-1, 2, -2) \in S$.

L'équation du plan tangent à S en $\boldsymbol{p}$ est

- ☐ $x + y + z - 3 = 0$
- ☐ $x + y + z + 1 = 0$
- ☐ $2x - 2y + z + 8 = 0$
- ☐ $x + y + z - 1 = 0$

Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 19 : Soit $\left(\boldsymbol{u}_n\right)_{n\geq 1}$, avec $\boldsymbol{u}_n = (x_n, y_n, z_n) \in \mathbb{R}^3$, une suite divergente. Alors $\left(x_n\right)_{n\geq 1}$ est une suite divergente dans $\mathbb{R}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 20 : Soit $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ et soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur D telle que $\lim\limits_{t\to 0} f(t,t) = 1$. Alors $\lim\limits_{t\to 0} f(t,0) = 1$ et $\lim\limits_{t\to 0} f(0,t) = 1$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 21 : Soit $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$ et soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque. Si f n'est pas bornée sur D, alors f n'est pas continue sur D.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 22 : Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ deux fonctions différentiables. Alors en tout point $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$ les matrices jacobiennes de f, g et $f+g$ satisfont

$$J_{f+g}(\boldsymbol{p}) = J_f(\boldsymbol{p}) + J_g(\boldsymbol{p})\,.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 23 : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction telle qu'au point $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ la dérivée directionnelle existe suivant tout vecteur unité $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$. Alors f est différentiable en $\boldsymbol{p}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 24 : Soit $y(x)$ une solution de l'équation différentielle linéaire inhomogène du deuxième ordre $y''(x) + x^2 y'(x) = 4$. Alors pour tout $C \in \mathbb{R}$, la fonction $y_1(x) = y(x) + C$ est aussi une solution de cette équation différentielle.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 25 : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2(\mathbb{R}^n)$. Alors f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^n$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 26 : Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une fonction différentiable. Alors la fonction composée $f = g \circ g$ est différentiable, et en tout point $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$, les matrices jacobiennes de f et g satisfont

$$\det J_f(\boldsymbol{p}) = \left(\det J_g(\boldsymbol{p})\right)^2.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 27 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy \right) dx \leq \int_0^2 \left(\int_0^2 f(x,y)\,dy \right) dx\,.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 28 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une fonction de classe $C^2(\mathbb{R}^3)$. Alors en tout point $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$ la matrice jacobienne $J_f(p)$ est une matrice symétrique.

☐ VRAI ☐ FAUX