Durée : 144 minutes

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Analyse II
Examen
Partie commune
Printemps 2016

Réponses

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

$+3$ points si la réponse est correcte,

0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,

-1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

$+1$ point si la réponse est correcte,

0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,

-1 point si la réponse est incorrecte.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soit $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ et soit $f : D \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = x \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right).$$

Alors

- ☐ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$
- ☐ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = y$
- ☐ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas
- ■ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

Question 2 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 2x + 2y + 1\,.$$

Alors le point $\boldsymbol{p} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

- ☐ n'est pas un point stationnaire de f
- ■ est un point de minimum local de f
- ☐ est un point de maximum local de f
- ☐ n'est pas un point d'extremum local de f

Question 3 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$x^2 y'(x) + 4y'(x) - x\,y(x) + x = 0$$

pour $x \in \mathbb{R}$ avec la condition initiale $y(0) = 5$ satisfait aussi

☐ $y(\sqrt{5}) = 1$ ☐ $y(\sqrt{5}) = 2$ ■ $y(\sqrt{5}) = 7$ ☐ $y(\sqrt{5}) = -7$

Question 4 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) = -2xy^3z^4 + 2x^2y^2 - 4$$

et soit $\boldsymbol{p} = (1,-1,1)$. Puisque $f(\boldsymbol{p}) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{p}) \neq 0$, l'équation $f\big(x,y,z\big) = 0$ définit dans un voisinage de $(x,z) = (1,1)$ une fonction $y = g(x,z)$ qui satisfait $g(1,1) = -1$ et $f\big(x, g(x,z), z\big) = 0$ ainsi que

☐ $\frac{\partial g}{\partial z}(1,1) = 1$ ☐ $\frac{\partial g}{\partial z}(1,1) = -\frac{4}{5}$ ■ $\frac{\partial g}{\partial z}(1,1) = \frac{4}{5}$ ☐ $\frac{\partial g}{\partial z}(1,1) = 4$

Question 5 : Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 25 \text{ et } y \geq 0\}$ et soit $f : D \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = 3y - 4x\,.$$

Alors le maximum global $M = \max_{(x,y)\in D} f(x, y)$ de f sur D et le minimum global $m = \min_{(x,y)\in D} f(x, y)$ de f sur D satisfont

- ☐ $M = 25$ et $m = -25$
- ☐ $M = 20$ et $m = -25$
- ■ $M = 25$ et $m = -20$
- ☐ $M = 20$ et $m = -20$

Question 6 : Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\,,\ y \leq 0\,,\ x \leq 0\}$. Alors l'intégrale

$$\int_D x\, y^3\, dx\, dy$$

vaut

- ☐ $\frac{31}{20}$
- ☐ $-\frac{21}{8}$
- ☐ $\frac{3\pi}{4}$
- ■ $\frac{21}{8}$

Question 7 : Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la fonction définie par

$$h(u, v) = \left(u^2,\ ve^{-u},\ e^{-2v}\right)$$

et soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto g(x, y, z)$, une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^3)$. Alors la dérivée partielle par rapport à v de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par

$$f(u, v) = g\big(h(u, v)\big)\,,$$

satisfait en $(u, v) = (1, 0)$,

- ■ $\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0) = e^{-1}\frac{\partial g}{\partial y}(1, 0, 1) - 2\frac{\partial g}{\partial z}(1, 0, 1)$
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0) = \frac{\partial g}{\partial y}(1, 0, 1)$
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0) = \frac{\partial g}{\partial x}(1, 0, 1) - e^{-1}\frac{\partial g}{\partial y}(1, 0, 1)$
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0) = e^{-1}\frac{\partial g}{\partial x}(1, 0, 1) - e^{-1}\frac{\partial g}{\partial y}(1, 0, 1)$

Question 8 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y, z) = (x^2 + y)z + z^2 - z\,.$$

Alors un vecteur $\boldsymbol{v}$ perpendiculaire à la surface de niveau de f passant par le point $(2, 0, -1)$ est

- ☐ $\boldsymbol{v} = \big(1,\ -4,\ 1\big)$
- ■ $\boldsymbol{v} = \big(4,\ 1,\ -1\big)$
- ☐ $\boldsymbol{v} = \big(-1,\ -4,\ 4\big)$
- ☐ $\boldsymbol{v} = \big(-4,\ 1,\ 1\big)$

Question 9 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = 3y - x^2\,.$$

La valeur minimale de f sous la contrainte $g(x, y) = 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ est

□ -6 □ -9 ■ -10 □ 6

Question 10 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \big(e^{xy},\, \cos(xy),\, \arctan(x - 2y)\big)\,.$$

Alors la matrice jacobienne $J_f(x, y)$ de f évaluée au point $\boldsymbol{p} = \big(2, 1\big)$ est

■ $J_f(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} e^2 & 2e^2 \\ -\sin(2) & -2\sin(2) \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

□ $J_f(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} e^2 & 2e^2 \\ -\sin(2) & -2\sin(2) \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

□ $J_f(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} e^2 & -\sin(2) & 1 \\ 2e^2 & -2\sin(2) & 2 \end{pmatrix}$

□ $J_f(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} e^2 & -\sin(2) & 1 \\ 2e^2 & -2\sin(2) & -2 \end{pmatrix}$

Question 11 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit

$$I = \int_{-1}^{1} \left(\int_{0}^{1-|x|} f(x, y)\, dy \right) dx\,.$$

Alors

□ $I = \displaystyle\int_{0}^{1} \left(\int_{0}^{1-|y|} f(x, y)\, dx \right) dy$

□ $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\int_{0}^{1-|y|} f(x, y)\, dx \right) dy$

□ $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\int_{1-y}^{1+y} f(x, y)\, dx \right) dy$

■ $I = \displaystyle\int_{0}^{1} \left(\int_{y-1}^{1-y} f(x, y)\, dx \right) dy$

Question 12 : Soit $F :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(t) = \int_{t}^{t^2} \frac{e^{\,xt}}{x}\, dx\,.$$

Alors on a

□ $F'(1) = 3e$ □ $F'(1) = 1$ □ $F'(1) = 0$ ■ $F'(1) = e$

Question 13 : La solution $u(t)$ de l'équation différentielle

$$u''(t) - u'(t) - 2u(t) = 4t - 2$$

pour $t \in \mathbb{R}$ avec les conditions initiales $u(0) = 0$ et $u'(0) = 3$ satisfait aussi

- ■ $u(1) = e^2 - 3e^{-1}$
- □ $u(1) = -2e^{-2} - 2e + 2$
- □ $u(1) = e - e^{-2}$
- □ $u(1) = e^2 - e^{-1}$

Question 14 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = x^3 + y^2 - 2x - y$$

et soit le point $\boldsymbol{p} = (1, -1)$. Alors l'équation du plan tangent au graphe de f en $\big(\boldsymbol{p}\,,\, f(\boldsymbol{p})\big)$ est

- □ $z + 2x + y + 1 = 0$
- ■ $z - x + 3y + 3 = 0$
- □ $z + 2x + y - 2 = 0$
- □ $z - x + 3y - 1 = 0$

Question 15 : Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la courbe définie par

$$\gamma(t) = \big(t\cos(t),\, t\sin(t),\, t\big)\,.$$

La longueur de l'arc de la courbe γ reliant les points $A = (0, 0, 0)$ et $B = (2\pi, 0, 2\pi)$ est égale à

- ■ $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{2 + t^2}\, dt$
- □ $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{2 + t^2}\, dt$
- □ $\displaystyle\int_0^{\pi} (2 + t^2)\, dt$
- □ $\displaystyle\int_0^{2\pi} 2t^2\, dt$

Question 16 : Le polynôme de Taylor d'ordre deux de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \sin(xy)$$

au point $(0, 1)$ est

- □ $p_2(x, y) = x + y + 2(x - 1)y$
- □ $p_2(x, y) = x - x^2 - (y - 1)^2$
- □ $p_2(x, y) = 1 + x + y + 2(x - 1)y$
- ■ $p_2(x, y) = x + x(y - 1)$

Question 17 : Soit $D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ et } y > 0\big\}$ et soit $f : D \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \log(x^2 + y)\,.$$

Alors la dérivée directionnelle de f au point $(2, 1)$ suivant le vecteur $\boldsymbol{e} = \left(\frac{3}{5}\,,\,\frac{4}{5}\right)$ est égale à

- ■ $\dfrac{16}{25}$
- □ $-\dfrac{16}{25}$
- □ $\dfrac{85}{29}$
- □ $-\dfrac{85}{29}$

Question 18 : Soit $D =]0, \infty[\times]0, \infty[$ et soit $f : D \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \left|\log(x) \log(y)\right| .$$

Alors

- ☐ f est bornée sur D
- ☐ f n'est pas continue en $(1, 1)$
- ■ les dérivées partielles de f existent en $(1, 1)$
- ☐ la dérivée partielle de f par rapport à y n'existe pas en $(1, 1)$

Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 19 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$. Alors, pour tout point $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{p}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\boldsymbol{p})\,.$$

■ VRAI □ FAUX

Question 20 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ et soit $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$. Si $\boldsymbol{p}$ est un point stationnaire de f et si le déterminant de la matrice hessienne $\mathrm{Hess}_f(\boldsymbol{p})$ est strictement positif, alors f admet un minimum local en $\boldsymbol{p}$.

□ VRAI ■ FAUX

Question 21 : Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Alors

$$0 \leq \int_D \frac{x^2}{x^2 + y^4}\, dx\, dy \leq \pi\,.$$

■ VRAI □ FAUX

Question 22 : L'ensemble $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\,,\ y > 0\,,\ z = 0\}$ est ouvert.

□ VRAI ■ FAUX

Question 23 : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction où $D \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble borné. Si f est continue sur D, alors f admet un maximum global sur D.

□ VRAI ■ FAUX

Question 24 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ et soit $\boldsymbol{p} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
Si f admet un maximum local en $\boldsymbol{p}$, alors

$$\lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{h} = 0\,.$$

□ VRAI ■ FAUX

Question 25 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un ensemble fermé et borné $D \subset \mathbb{R}^2$ et soit $\widetilde{D} \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble fermé et borné. Si $G : \widetilde{D} \to D$ est une fonction bijective de classe C^1 et $J_G(x,y)$ est la matrice jacobienne de G, alors on a

$$\int_D f(u,v)\,du\,dv = \int_{\widetilde{D}} f\big(G(x,y)\big)\Big|\det\big(J_G(x,y)\big)\Big|\,dx\,dy\,,$$

en supposant que les deux intégrales existent.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 26 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^3$, alors f est une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^3)$.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 27 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(0,0) = 1$. Si pour tout $a \in \mathbb{R}$ fixé on a

$$\lim_{x\to 0} f(x, ax) = 1\,,$$

alors f est continue en $(0,0)$.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 28 : Soient $p, q : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues définies sur l'intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et soit $L(u) = u'' + p\,u' + q\,u$. Si u_h est une solution de l'équation différentielle $L(u) = 0$ sur I et u_p est une solution de l'équation différentielle $L(u) = g$ sur I, où $g(t) = \cos(t^2)$, alors $3u_p + u_h$ est solution de l'équation différentielle $L(u) = 3g$ sur I.

■ VRAI ☐ FAUX