

# Analyse II

## Examen

### Partie commune

### Printemps 2016

---

## Enoncé

---

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

- +3 points si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
- −1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

- +1 point si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
- −1 point si la réponse est incorrecte.

## Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures.  
Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

**Question 1 :** Soit  $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x, y) = x \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right).$$

Alors

☐  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 1$

☐  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = y$

☐  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  n'existe pas

☐  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$

**Question 2 :** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2x + 2y + 1.$$

Alors le point  $\mathbf{p} = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

☐ n'est pas un point stationnaire de  $f$

☐ est un point de minimum local de  $f$

☐ est un point de maximum local de  $f$

☐ n'est pas un point d'extremum local de  $f$

**Question 3 :** La solution  $y(x)$  de l'équation différentielle

$$x^2 y'(x) + 4y'(x) - x y(x) + x = 0$$

pour  $x \in \mathbb{R}$  avec la condition initiale  $y(0) = 5$  satisfait aussi

☐  $y(\sqrt{5}) = 1$

☐  $y(\sqrt{5}) = 2$

☐  $y(\sqrt{5}) = 7$

☐  $y(\sqrt{5}) = -7$

**Question 4 :** Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x, y, z) = -2xy^3z^4 + 2x^2y^2 - 4$$

et soit  $\mathbf{p} = (1, -1, 1)$ . Puisque  $f(\mathbf{p}) = 0$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}) \neq 0$ , l'équation  $f(x, y, z) = 0$  définit dans un voisinage de  $(x, z) = (1, 1)$  une fonction  $y = g(x, z)$  qui satisfait  $g(1, 1) = -1$  et  $f(x, g(x, z), z) = 0$  ainsi que

☐  $\frac{\partial g}{\partial z}(1, 1) = 1$

☐  $\frac{\partial g}{\partial z}(1, 1) = -\frac{4}{5}$

☐  $\frac{\partial g}{\partial z}(1, 1) = \frac{4}{5}$

☐  $\frac{\partial g}{\partial z}(1, 1) = 4$

**Question 5 :** Soit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 25 \text{ et } y \geq 0\}$  et soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x, y) = 3y - 4x.$$

Alors le maximum global  $M = \max_{(x,y) \in D} f(x, y)$  de  $f$  sur  $D$  et le minimum global  $m = \min_{(x,y) \in D} f(x, y)$  de  $f$  sur  $D$  satisfont

☐  $M = 25$  et  $m = -25$

☐  $M = 20$  et  $m = -25$

☐  $M = 25$  et  $m = -20$

☐  $M = 20$  et  $m = -20$

**Question 6 :** Soit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \leq 0, x \leq 0\}$ . Alors l'intégrale

$$\int_D x y^3 dx dy$$

vaut

☐  $\frac{31}{20}$

☐  $-\frac{21}{8}$

☐  $\frac{3\pi}{4}$

☐  $\frac{21}{8}$

**Question 7 :** Soit  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la fonction définie par

$$h(u, v) = (u^2, v e^{-u}, e^{-2v})$$

et soit  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto g(x, y, z)$ , une fonction de classe  $C^1(\mathbb{R}^3)$ . Alors la dérivée partielle par rapport à  $v$  de la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par

$$f(u, v) = g(h(u, v)),$$

satisfait en  $(u, v) = (1, 0)$ ,

☐  $\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0) = e^{-1} \frac{\partial g}{\partial y}(1, 0, 1) - 2 \frac{\partial g}{\partial z}(1, 0, 1)$

☐  $\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0) = \frac{\partial g}{\partial y}(1, 0, 1)$

☐  $\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0) = \frac{\partial g}{\partial x}(1, 0, 1) - e^{-1} \frac{\partial g}{\partial y}(1, 0, 1)$

☐  $\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0) = e^{-1} \frac{\partial g}{\partial x}(1, 0, 1) - e^{-1} \frac{\partial g}{\partial y}(1, 0, 1)$

**Question 8 :** Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x, y, z) = (x^2 + y)z + z^2 - z.$$

Alors un vecteur  $\mathbf{v}$  perpendiculaire à la surface de niveau de  $f$  passant par le point  $(2, 0, -1)$  est

☐  $\mathbf{v} = (1, -4, 1)$

☐  $\mathbf{v} = (4, 1, -1)$

☐  $\mathbf{v} = (-1, -4, 4)$

☐  $\mathbf{v} = (-4, 1, 1)$

**Question 9 :** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x, y) = 3y - x^2.$$

La valeur minimale de  $f$  sous la contrainte  $g(x, y) = 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$  est

☐  $-6$

☐  $-9$

☐  $-10$

☐  $6$

**Question 10 :** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la fonction définie par

$$f(x, y) = (e^{xy}, \cos(xy), \arctan(x - 2y)).$$

Alors la matrice jacobienne  $J_f(x, y)$  de  $f$  évaluée au point  $\mathbf{p} = (2, 1)$  est

☐  $J_f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} e^2 & 2e^2 \\ -\sin(2) & -2\sin(2) \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

☐  $J_f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} e^2 & 2e^2 \\ -\sin(2) & -2\sin(2) \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

☐  $J_f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} e^2 & -\sin(2) & 1 \\ 2e^2 & -2\sin(2) & 2 \end{pmatrix}$

☐  $J_f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} e^2 & -\sin(2) & 1 \\ 2e^2 & -2\sin(2) & -2 \end{pmatrix}$

**Question 11 :** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et soit

$$I = \int_{-1}^1 \left( \int_0^{1-|x|} f(x, y) dy \right) dx.$$

Alors

☐  $I = \int_0^1 \left( \int_0^{1-|y|} f(x, y) dx \right) dy$

☐  $I = \int_{-1}^1 \left( \int_0^{1-|y|} f(x, y) dx \right) dy$

☐  $I = \int_{-1}^1 \left( \int_{1-y}^{1+y} f(x, y) dx \right) dy$

☐  $I = \int_0^1 \left( \int_{y-1}^{1-y} f(x, y) dx \right) dy$

**Question 12 :** Soit  $F : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$F(t) = \int_t^{t^2} \frac{e^{xt}}{x} dx.$$

Alors on a

☐  $F'(1) = 3e$

☐  $F'(1) = 1$

☐  $F'(1) = 0$

☐  $F'(1) = e$

**Question 13 :** La solution  $u(t)$  de l'équation différentielle

$$u''(t) - u'(t) - 2u(t) = 4t - 2$$

pour  $t \in \mathbb{R}$  avec les conditions initiales  $u(0) = 0$  et  $u'(0) = 3$  satisfait aussi

☐  $u(1) = e^2 - 3e^{-1}$

☐  $u(1) = -2e^{-2} - 2e + 2$

☐  $u(1) = e - e^{-2}$

☐  $u(1) = e^2 - e^{-1}$

**Question 14 :** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x, y) = x^3 + y^2 - 2x - y$$

et soit le point  $\mathbf{p} = (1, -1)$ . Alors l'équation du plan tangent au graphe de  $f$  en  $(\mathbf{p}, f(\mathbf{p}))$  est

☐  $z + 2x + y + 1 = 0$

☐  $z - x + 3y + 3 = 0$

☐  $z + 2x + y - 2 = 0$

☐  $z - x + 3y - 1 = 0$

**Question 15 :** Soit  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  la courbe définie par

$$\gamma(t) = (t \cos(t), t \sin(t), t).$$

La longueur de l'arc de la courbe  $\gamma$  reliant les points  $A = (0, 0, 0)$  et  $B = (2\pi, 0, 2\pi)$  est égale à

☐  $\int_0^{2\pi} \sqrt{2 + t^2} dt$

☐  $\int_0^{\pi} \sqrt{2 + t^2} dt$

☐  $\int_0^{\pi} (2 + t^2) dt$

☐  $\int_0^{2\pi} 2t^2 dt$

**Question 16 :** Le polynôme de Taylor d'ordre deux de la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x, y) = \sin(xy)$$

au point  $(0, 1)$  est

☐  $p_2(x, y) = x + y + 2(x - 1)y$

☐  $p_2(x, y) = x - x^2 - (y - 1)^2$

☐  $p_2(x, y) = 1 + x + y + 2(x - 1)y$

☐  $p_2(x, y) = x + x(y - 1)$

**Question 17 :** Soit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ et } y > 0\}$  et soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x, y) = \log(x^2 + y).$$

Alors la dérivée directionnelle de  $f$  au point  $(2, 1)$  suivant le vecteur  $\mathbf{e} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$  est égale à

☐  $\frac{16}{25}$

☐  $-\frac{16}{25}$

☐  $\frac{85}{29}$

☐  $-\frac{85}{29}$

**Question 18:** Soit  $D = ]0, \infty[ \times ]0, \infty[$  et soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x, y) = |\log(x) \log(y)|.$$

Alors

- ☐  $f$  est bornée sur  $D$
- ☐  $f$  n'est pas continue en  $(1, 1)$
- ☐ les dérivées partielles de  $f$  existent en  $(1, 1)$
- ☐ la dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $y$  n'existe pas en  $(1, 1)$

## Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

**Question 19 :** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2(\mathbb{R}^2)$ . Alors, pour tout point  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$  on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{p}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{p}).$$

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 20 :** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2(\mathbb{R}^2)$  et soit  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ . Si  $\mathbf{p}$  est un point stationnaire de  $f$  et si le déterminant de la matrice hessienne  $\text{Hess}_f(\mathbf{p})$  est strictement positif, alors  $f$  admet un minimum local en  $\mathbf{p}$ .

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 21 :** Soit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Alors

$$0 \leq \int_D \frac{x^2}{x^2 + y^4} dx dy \leq \pi.$$

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 22 :** L'ensemble  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z = 0\}$  est ouvert.

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 23 :** Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction où  $D \subset \mathbb{R}^n$  est un ensemble borné. Si  $f$  est continue sur  $D$ , alors  $f$  admet un maximum global sur  $D$ .

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 24 :** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2(\mathbb{R}^2)$  et soit  $\mathbf{p} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . Si  $f$  admet un maximum local en  $\mathbf{p}$ , alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{h} = 0.$$

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 25 :** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur un ensemble fermé et borné  $D \subset \mathbb{R}^2$  et soit  $\tilde{D} \subset \mathbb{R}^2$  un ensemble fermé et borné. Si  $G : \tilde{D} \rightarrow D$  est une fonction bijective de classe  $C^1$  et  $J_G(x, y)$  est la matrice jacobienne de  $G$ , alors on a

$$\int_D f(u, v) du dv = \int_{\tilde{D}} f(G(x, y)) \left| \det(J_G(x, y)) \right| dx dy,$$

en supposant que les deux intégrales existent.

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 26 :** Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Si  $f$  est différentiable en tout point de  $\mathbb{R}^3$ , alors  $f$  est une fonction de classe  $C^1(\mathbb{R}^3)$ .

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 27 :** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que  $f(0, 0) = 1$ . Si pour tout  $a \in \mathbb{R}$  fixé on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, ax) = 1,$$

alors  $f$  est continue en  $(0, 0)$ .

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 28 :** Soient  $p, q : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues définies sur l'intervalle ouvert  $I \subset \mathbb{R}$  et soit  $L(u) = u'' + pu' + qu$ . Si  $u_h$  est une solution de l'équation différentielle  $L(u) = 0$  sur  $I$  et  $u_p$  est une solution de l'équation différentielle  $L(u) = g$  sur  $I$ , où  $g(t) = \cos(t^2)$ , alors  $3u_p + u_h$  est solution de l'équation différentielle  $L(u) = 3g$  sur  $I$ .

☐ VRAI      ☐ FAUX