

Durée : 144 minutes



Analyse II

Examen

Partie commune

Printemps 2015

Réponses

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

- +3 points si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
- 1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

- +1 point si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
- 1 point si la réponse est incorrecte.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures.
Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1: La solution $u(t)$ de l'équation différentielle

$$u''(t) - 4u'(t) + 5u(t) = 8\sin(t)$$

pour $t \in \mathbb{R}$ avec les conditions initiales $u(0) = 2$ et $u'(0) = 5$ est

- $u(t) = \sin(t)(4e^{2t} - 1) + \cos(t)(e^{2t} + 1)$
- $u(t) = \sin(t)(2e^{2t} + 1) + \cos(t)(e^{2t} + 1)$
- $u(t) = \sin(t)(2e^{2t} + 1) - \cos(t)(e^{2t} + 1)$
- $u(t) = -\sin(t)(2e^{2t} + 1) + \cos(t)(e^{2t} + 1)$

Question 2: Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y, z) = 2x^2y^3z^4 + 2x^3y^2 - 3y^2z - 1$$

et soit $\mathbf{p} = (1, 1, 1)$. Puisque $f(\mathbf{p}) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) \neq 0$, l'équation $f(x, y, z) = 0$ définit dans un voisinage de $(y, z) = (1, 1)$ une fonction $x = g(y, z)$ qui satisfait $g(1, 1) = 1$ et $f(g(y, z), y, z) = 0$ ainsi que

- $\frac{\partial g}{\partial z}(1, 1) = \frac{1}{2}$
- $\frac{\partial g}{\partial z}(1, 1) = -\frac{4}{5}$
- $\frac{\partial g}{\partial z}(1, 1) = -\frac{1}{2}$
- $\frac{\partial g}{\partial z}(1, 1) = -2$

Question 3: Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 - z^2 + 2x + 2y + 1.$$

Alors le point $\mathbf{p} = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$

- est un point de maximum local de f
- est un point de minimum local de f
- est un point selle de f
- n'est pas un point stationnaire de f

Question 4: Le polynôme de Taylor d'ordre deux de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = e^{x^2+y-1}$$

au point $(1, 0)$ est

- $p_2(x, y) = 1 + 2(x - 1) + y + 6(x - 1)^2 + 4(x - 1)y + y^2$
- $p_2(x, y) = -1 + 2(x - 1) + y + 3(x - 1)^2 + 2(x - 1)y + \frac{1}{2}y^2$
- $p_2(x, y) = 1 + 2(x - 1) + y + 3(x - 1)^2 + 2(x - 1)y + \frac{1}{2}y^2$
- $p_2(x, y) = 1 + 2x + y + 3x^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2$

Question 5: Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y + xy \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Alors

- $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ n'existe pas
- f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$
- f n'est pas continue en $(0, 0)$
- f est différentiable en $(0, 0)$

Question 6: La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$(x^2 + 9)y'(x) + xy(x) - x(y(x))^2 = 0$$

pour $x \in \mathbb{R}$ avec la condition initiale $y(0) = \frac{1}{4}$ satisfait aussi

- $y(4) = \frac{1}{6}$
- $y(4) = 1$
- $y(4) = -\frac{1}{4}$
- $y(4) = 6$

Question 7: Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = x - y - x^2 + y^3$$

et soit le point $\mathbf{p} = (-2, 1)$. Alors l'équation du plan tangent au graphe de f en $(\mathbf{p}, f(\mathbf{p}))$ est

- $z - 5x - 2y + 6 = 0$
- $z - 5x - 2y - 2 = 0$
- $z - 2x - 5y + 7 = 0$
- $z - 5x - 2y - 8 = 0$

Question 8: Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1 \text{ et } y > -1\}$ et soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \log(x^2 + y).$$

Alors un vecteur \mathbf{v} dans la direction perpendiculaire à la ligne de niveau de f qui passe par le point $(2, 0)$ est

- $\mathbf{v} = (-4, 1)$
- $\mathbf{v} = \left(-\frac{1}{4}, -1\right)$
- $\mathbf{v} = (4, 1)$
- $\mathbf{v} = (1, -4)$

Question 9: Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$$f(x, y, z) = (\cos(xz), \sin(y - z)).$$

Alors la matrice jacobienne $J_f(x, y, z)$ de f évaluée au point $\mathbf{p} = (1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ est

- $J_f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
- $J_f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $J_f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $J_f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Question 10 : Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16, y \geq 0, x \leq 0\}$. Alors l'intégrale

$$\int_D x y \, dx \, dy$$

vaut

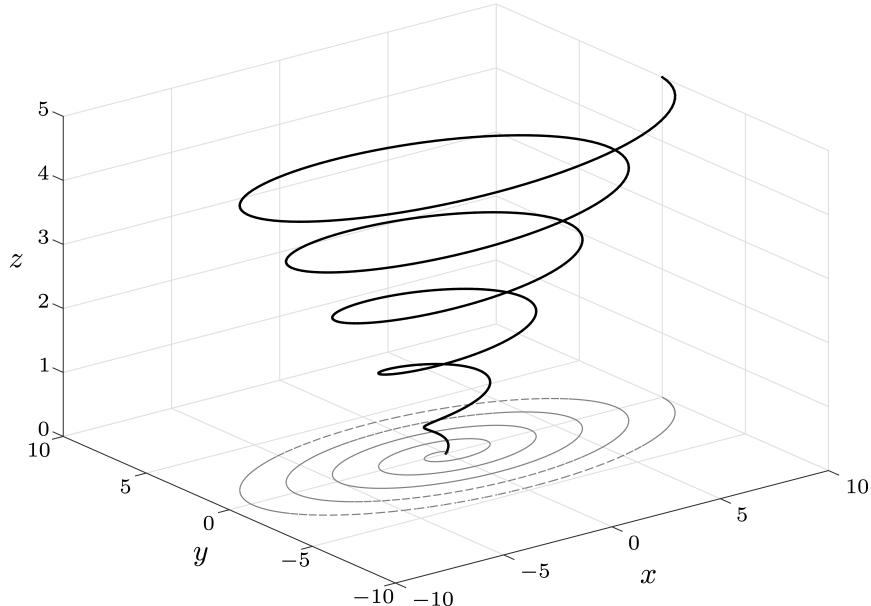
0

30

3π

-30

Question 11 : Soient une courbe ainsi que sa projection sur le plan x - y illustrées dans la figure suivante :



Laquelle parmi les suivantes pourrait être une paramétrisation de cette courbe ?

$(x, y, z) = (t \cos(2\pi t), t \sin(2\pi t), t)$ avec $t \in [0, 5]$

$(x, y, z) = (t \cos(2\pi t), 2t \sin(2\pi t), t)$ avec $t \in [0, 5]$

$(x, y, z) = (2 \cos(2\pi t), \sin(2\pi t), t)$ avec $t \in [0, 5]$

$(x, y, z) = (2t \cos(2\pi t), t \sin(2\pi t), t)$ avec $t \in [0, 5]$

Question 12 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et soit

$$I = \int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^1 f(x, y) dy \right) dx.$$

Alors

■ $I = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx \right) dy$

□ $I = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx \right) dy$

□ $I = \int_{-1}^1 \left(\int_{-y^2}^{y^2} f(x, y) dx \right) dy$

□ $I = \int_{-1}^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx \right) dy$

Question 13 : Soit $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la fonction définie par

$$h(u, v) = (-u(1 - 2v), u^2(1 - v), uv)$$

et soit $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto g(x, y, z)$, une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^3)$. Alors la dérivée partielle par rapport à v de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$f(u, v) = g(h(u, v)),$$

satisfait en $(u, v) = (1, 0)$,

□ $\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0) = \frac{\partial g}{\partial x}(-1, 1, 0) - 2\frac{\partial g}{\partial y}(-1, 1, 0) + \frac{\partial g}{\partial z}(-1, 1, 0)$

□ $\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0) = 2\frac{\partial g}{\partial x}(1, 0, 0) - \frac{\partial g}{\partial y}(1, 0, 0) + \frac{\partial g}{\partial z}(1, 0, 0)$

■ $\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0) = 2\frac{\partial g}{\partial x}(-1, 1, 0) - \frac{\partial g}{\partial y}(-1, 1, 0) + \frac{\partial g}{\partial z}(-1, 1, 0)$

□ $\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0) = -\frac{\partial g}{\partial x}(-1, 1, 0) + 2\frac{\partial g}{\partial y}(-1, 1, 0)$

Question 14 : Soit $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{(x^2 + y^4)^{3/2}}.$$

Alors

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ n'existe pas

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = y$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 1$

Question 15 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = xy.$$

La valeur maximale de f sous la contrainte $g(x, y) = 2x^2 + y^2 - 4 = 0$ est

$-\sqrt{2}$

1

0

$\sqrt{2}$

Question 16 : Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x \geq 0\}$ et soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = y + 2x.$$

Alors le maximum global $M = \max_{(x,y) \in D} f(x, y)$ de f sur D et le minimum global $m = \min_{(x,y) \in D} f(x, y)$ de f sur D satisfont

$M = \sqrt{5}$ et $m = -1$

$M = \sqrt{5}$ et $m = -\sqrt{5}$

$M = 1$ et $m = -1$

$M = \sqrt{5}$ et $m = 0$

Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 17: Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$. Alors la dérivée directionnelle de f en $(0, 0)$ suivant le vecteur $\mathbf{v} = (1, 1)$ est égale à la limite

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0)}{\sqrt{h^2 + k^2}}.$$

VRAI FAUX

Question 18: Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est différentiable en tout point de \mathbb{R}^2 , alors f est une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

VRAI FAUX

Question 19: Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ deux fonctions de classe C^1 . Alors la fonction $h = g \circ f$ est de classe C^1 et en tout point $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ les matrices jacobienes de f , g et h satisfont

$$J_h(\mathbf{p}) = J_g(f(\mathbf{p})) J_f(\mathbf{p}).$$

VRAI FAUX

Question 20: Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2(\mathbb{R}^3)$ et soit $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$. Si \mathbf{p} est un point stationnaire de f et si le déterminant de la matrice hessienne $\text{Hess}_f(\mathbf{p})$ est strictement négatif, alors \mathbf{p} est un point de maximum local f .

VRAI FAUX

Question 21: Soient A et B deux sous-ensembles de \mathbb{R}^n et soit $f : A \rightarrow B$ une fonction bijective telle que f et f^{-1} sont de classe C^1 . Alors pour tout $\mathbf{p} \in A$ on a $\det(J_f(\mathbf{p})) \neq 0$.

VRAI FAUX

Question 22: Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^n)$ et soit $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. Si \mathbf{p} est un point d'extremum local de f , alors \mathbf{p} est un point stationnaire de f .

VRAI FAUX

Question 23: Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un ensemble fermé et borné $D \subset \mathbb{R}^2$ et soit $\tilde{D} \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble fermé et borné. Si $G : \tilde{D} \rightarrow D$ est une fonction bijective de classe C^1 et $J_G(u, v)$ est la matrice jacobienne de G , alors on a

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_{\tilde{D}} f(G(u, v)) \left| \det(J_G(u, v)) \right| du dv,$$

en supposant que les deux intégrales existent.

VRAI FAUX

Question 24 : Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$. Alors

$$\int_D \frac{\tan(y)}{x^2 + y^2 + 1} dx dy \geq 1.$$

VRAI FAUX

Question 25 : Soit $\mathbf{v} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ vectoriel de classe C^2 . Alors $\nabla(\operatorname{div} \mathbf{v}) = 0$.

VRAI FAUX

Question 26 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(0, 0) = 1$. Si pour tout $\varphi \in [0, 2\pi[$ fixé on a

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) = 1,$$

alors f est continue en $(0, 0)$.

VRAI FAUX

Question 27 : Soient $p, q, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions continues définies sur l'intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et soit $L(u) = u'' + p u' + q u$. Si u_h est une solution de l'équation différentielle $L(u) = 0$ sur I et u_p est une solution de l'équation différentielle $L(u) = g$ sur I , alors $u_p + \frac{1}{2}u_h$ est solution de l'équation différentielle $L(u) = g$ sur I .

VRAI FAUX

Question 28 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$, une fonction qui est différentiable en un point $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$. Alors le vecteur $\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}), -\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}), -\frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}), 1\right)$ est perpendiculaire à l'hyperplan tangent au graphe de f en $(\mathbf{p}, f(\mathbf{p}))$.

VRAI FAUX

Question 29 : L'ensemble $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x \neq 0\}$ est fermé.

VRAI FAUX

Question 30 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$. Alors, pour tout point $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{p}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{p}).$$

VRAI FAUX

Question 31 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, une fonction de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$. Alors pour tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y + h) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x + h, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}{h}.$$

VRAI FAUX

Question 32 : Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction où $D \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble borné et fermé. Si f n'admet pas de maximum global sur D , alors f n'est pas continue sur D .

VRAI FAUX