Durée : 144 minutes

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Analyse II
Examen
Partie commune
Printemps 2015

Enoncé

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

$+3$ points si la réponse est correcte,

0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,

-1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

$+1$ point si la réponse est correcte,

0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,

-1 point si la réponse est incorrecte.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : La solution $u(t)$ de l'équation différentielle

$$u''(t) - 4u'(t) + 5u(t) = 8\sin(t)$$

pour $t \in \mathbb{R}$ avec les conditions initiales $u(0) = 2$ et $u'(0) = 5$ est

- ☐ $u(t) = \sin(t)\big(4e^{2t} - 1\big) + \cos(t)\big(e^{2t} + 1\big)$
- ☐ $u(t) = \sin(t)\big(2e^{2t} + 1\big) + \cos(t)\big(e^{2t} + 1\big)$
- ☐ $u(t) = \sin(t)\big(2e^{2t} + 1\big) - \cos(t)\big(e^{2t} + 1\big)$
- ☐ $u(t) = -\sin(t)\big(2e^{2t} + 1\big) + \cos(t)\big(e^{2t} + 1\big)$

Question 2 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y, z) = 2x^2y^3z^4 + 2x^3y^2 - 3y^2z - 1$$

et soit $\boldsymbol{p} = (1, 1, 1)$. Puisque $f(\boldsymbol{p}) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{p}) \neq 0$, l'équation $f\big(x, y, z\big) = 0$ définit dans un voisinage de $(y, z) = (1, 1)$ une fonction $x = g(y, z)$ qui satisfait $g(1, 1) = 1$ et $f\big(g(y, z), y, z\big) = 0$ ainsi que

☐ $\dfrac{\partial g}{\partial z}(1, 1) = \dfrac{1}{2}$ ☐ $\dfrac{\partial g}{\partial z}(1, 1) = -\dfrac{4}{5}$ ☐ $\dfrac{\partial g}{\partial z}(1, 1) = -\dfrac{1}{2}$ ☐ $\dfrac{\partial g}{\partial z}(1, 1) = -2$

Question 3 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 - z^2 + 2x + 2y + 1\,.$$

Alors le point $\boldsymbol{p} = \big(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\big)$

- ☐ est un point de maximum local de f
- ☐ est un point de minimum local de f
- ☐ est un point selle de f
- ☐ n'est pas un point stationnaire de f

Question 4 : Le polynôme de Taylor d'ordre deux de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = e^{x^2 + y - 1}$$

au point $(1, 0)$ est

- ☐ $p_2(x, y) = 1 + 2(x - 1) + y + 6(x - 1)^2 + 4(x - 1)y + y^2$
- ☐ $p_2(x, y) = -1 + 2(x - 1) + y + 3(x - 1)^2 + 2(x - 1)y + \dfrac{1}{2}\,y^2$
- ☐ $p_2(x, y) = 1 + 2(x - 1) + y + 3(x - 1)^2 + 2(x - 1)y + \dfrac{1}{2}\,y^2$
- ☐ $p_2(x, y) = 1 + 2x + y + 3x^2 + 2xy + \dfrac{1}{2}\,y^2$

Question 5 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y + xy \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Alors

- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'existe pas
- ☐ f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$
- ☐ f n'est pas continue en $(0,0)$
- ☐ f est différentiable en $(0,0)$

Question 6 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$(x^2+9)\,y'(x) + x\,y(x) - x\big(y(x)\big)^2 = 0$$

pour $x \in \mathbb{R}$ avec la condition initiale $y(0) = \dfrac{1}{4}$ satisfait aussi

- ☐ $y(4) = \frac{1}{6}$
- ☐ $y(4) = 1$
- ☐ $y(4) = -\frac{1}{4}$
- ☐ $y(4) = 6$

Question 7 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = x - y - x^2 + y^3$$

et soit le point $\boldsymbol{p} = (-2,1)$. Alors l'équation du plan tangent au graphe de f en $\big(\boldsymbol{p}\,,\, f(\boldsymbol{p})\big)$ est

- ☐ $z - 5x - 2y + 6 = 0$
- ☐ $z - 5x - 2y - 2 = 0$
- ☐ $z - 2x - 5y + 7 = 0$
- ☐ $z - 5x - 2y - 8 = 0$

Question 8 : Soit $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1 \text{ et } y > -1\big\}$ et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \log\big(x^2 + y\big)\,.$$

Alors un vecteur $\boldsymbol{v}$ dans la direction perpendiculaire à la ligne de niveau de f qui passe par le point $(2,0)$ est

- ☐ $\boldsymbol{v} = \big(-4,\, 1\big)$
- ☐ $\boldsymbol{v} = \big(4,\, 1\big)$
- ☐ $\boldsymbol{v} = \left(-\frac{1}{4}\,,\, -1\right)$
- ☐ $\boldsymbol{v} = \big(1,\, -4\big)$

Question 9 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) = \Big(\cos(xz),\, \sin(y-z)\Big)\,.$$

Alors la matrice jacobienne $J_f(x,y,z)$ de f évaluée au point $\boldsymbol{p} = \left(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ est

- ☐ $J_f(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
- ☐ $J_f(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ☐ $J_f(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $J_f(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

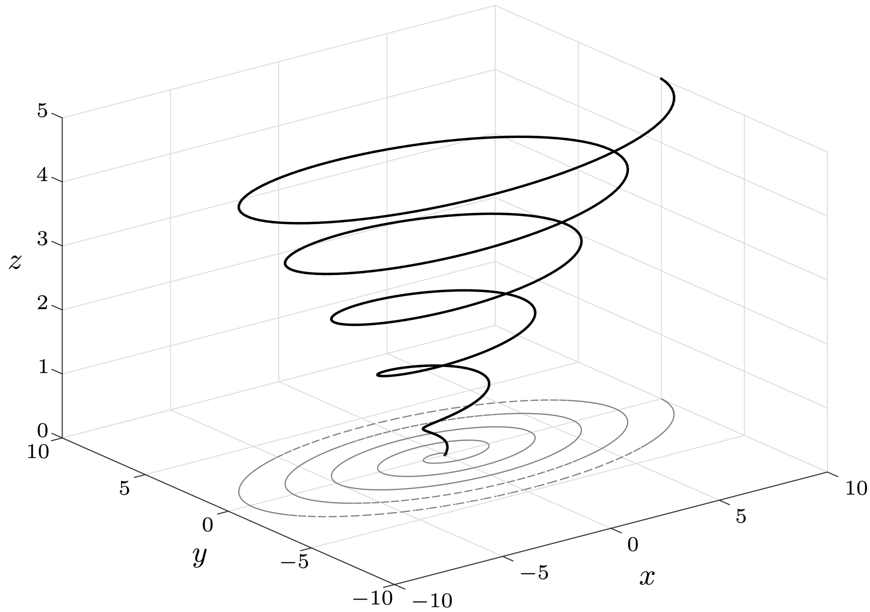
Question 10 : Soit $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2+y^2 \leq 16\,,\ y \geq 0\,,\ x \leq 0\big\}$. Alors l'intégrale

$$\int_D x\,y\,dx\,dy$$

vaut

☐ 0 ☐ 30 ☐ 3π ☐ -30

Question 11 : Soient une courbe ainsi que sa projection sur le plan x-y illustrées dans la figure suivante :



Laquelle parmi les suivantes pourrait être une paramétrisation de cette courbe ?

☐ $(x,y,z) = \big(t\cos(2\pi t),\ t\sin(2\pi t),\ t\big)$ avec $t \in [0,5]$

☐ $(x,y,z) = \big(t\cos(2\pi t),\ 2t\sin(2\pi t),\ t\big)$ avec $t \in [0,5]$

☐ $(x,y,z) = \big(2\cos(2\pi t),\ \sin(2\pi t),\ t\big)$ avec $t \in [0,5]$

☐ $(x,y,z) = \big(2t\cos(2\pi t),\ t\sin(2\pi t),\ t\big)$ avec $t \in [0,5]$

Question 12 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit

$$I = \int_{-1}^{1} \left(\int_{x^2}^{1} f(x,y)\, dy \right) dx\,.$$

Alors

- ☐ $I = \displaystyle\int_{0}^{1} \left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\, dx \right) dy$
- ☐ $I = \displaystyle\int_{0}^{1} \left(\int_{0}^{\sqrt{y}} f(x,y)\, dx \right) dy$
- ☐ $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\int_{-y^2}^{y^2} f(x,y)\, dx \right) dy$
- ☐ $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\int_{0}^{\sqrt{y}} f(x,y)\, dx \right) dy$

Question 13 : Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la fonction définie par

$$h(u,v) = \Big(-u(1-2v),\ u^2(1-v),\ uv \Big)$$

et soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto g(x,y,z)$, une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^3)$. Alors la dérivée partielle par rapport à v de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par

$$f(u,v) = g\big(h(u,v)\big)\,,$$

satisfait en $(u,v) = (1,0)$,

- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \dfrac{\partial g}{\partial x}(-1,1,0) - 2\dfrac{\partial g}{\partial y}(-1,1,0) + \dfrac{\partial g}{\partial z}(-1,1,0)$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0) = 2\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,0,0) - \dfrac{\partial g}{\partial y}(1,0,0) + \dfrac{\partial g}{\partial z}(1,0,0)$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0) = 2\dfrac{\partial g}{\partial x}(-1,1,0) - \dfrac{\partial g}{\partial y}(-1,1,0) + \dfrac{\partial g}{\partial z}(-1,1,0)$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0) = -\dfrac{\partial g}{\partial x}(-1,1,0) + 2\dfrac{\partial g}{\partial y}(-1,1,0)$

Question 14 : Soit $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ et soit $f : D \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{\left(x^2 + y^4\right)^{3/2}}\,.$$

Alors

- ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas
- ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = y$
- ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$
- ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$

Question 15 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = xy\,.$$

La valeur maximale de f sous la contrainte $g(x,y) = 2x^2 + y^2 - 4 = 0$ est

☐ $-\sqrt{2}$ ☐ 1 ☐ 0 ☐ $\sqrt{2}$

Question 16 : Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x \geq 0\right\}$ et soit $f : D \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = y + 2x\,.$$

Alors le maximum global $M = \max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$ de f sur D et le minimum global $m = \min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$ de f sur D satisfont

- ☐ $M = \sqrt{5}$ et $m = -1$
- ☐ $M = \sqrt{5}$ et $m = -\sqrt{5}$
- ☐ $M = 1$ et $m = -1$
- ☐ $M = \sqrt{5}$ et $m = 0$

Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 17 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$. Alors la dérivée directionnelle de f en $(0,0)$ suivant le vecteur $\boldsymbol{v} = \big(1,\, 1\big)$ est égale à la limite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} \,.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 18 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$, alors f est une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 19 : Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ deux fonctions de classe C^1. Alors la fonction $h = g \circ f$ est de classe C^1 et en tout point $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ les matrices jacobiennes de f, g et h satisfont

$$J_h(\boldsymbol{p}) = J_g\big(f(\boldsymbol{p})\big) J_f(\boldsymbol{p}) \,.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 20 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2(\mathbb{R}^3)$ et soit $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$. Si $\boldsymbol{p}$ est un point stationnaire de f et si le déterminant de la matrice hessienne $\mathrm{Hess}_f(\boldsymbol{p})$ est strictement négatif, alors $\boldsymbol{p}$ est un point de maximum local f.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 21 : Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : A \to B$ une fonction bijective telle que f et f^{-1} sont de classe C^1. Alors pour tout $\boldsymbol{p} \in A$ on a $\det\big(J_f(\boldsymbol{p})\big) \neq 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 22 : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^n)$ et soit $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$. Si $\boldsymbol{p}$ est un point d'extremum local de f, alors $\boldsymbol{p}$ est un point stationnaire de f.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 23 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un ensemble fermé et borné $D \subset \mathbb{R}^2$ et soit $\widetilde{D} \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble fermé et borné. Si $G : \widetilde{D} \to D$ est une fonction bijective de classe C^1 et $J_G(u,v)$ est la matrice jacobienne de G, alors on a

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\widetilde{D}} f\big(G(u,v)\big) \Big|\det\big(J_G(u,v)\big)\Big|\,du\,dv \,,$$

en supposant que les deux intégrales existent.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 24 : Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ \ x \geq 0\}$. Alors

$$\int_D \frac{\tan(y)}{x^2+y^2+1}\, dx\, dy \,\geq\, 1\,.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 25 : Soit $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un champ vectoriel de classe C^2. Alors $\nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{v}) = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 26 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(0,0) = 1$. Si pour tout $\varphi \in [0, 2\pi[$ fixé on a

$$\lim_{r \to 0} f\big(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\big) = 1\,,$$

alors f est continue en $(0,0)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 27 : Soient $p, q, g : I \to \mathbb{R}$ trois fonctions continues définies sur l'intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et soit $L(u) = u'' + p\,u' + q\,u$. Si u_h est une solution de l'équation différentielle $L(u) = 0$ sur I et u_p est une solution de l'équation différentielle $L(u) = g$ sur I, alors $u_p + \frac{1}{2}u_h$ est solution de l'équation différentielle $L(u) = g$ sur I.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 28 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$, une fonction qui est différentiable en un point $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$. Alors le vecteur $\Big(-\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{p}),\, -\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{p}),\, -\frac{\partial f}{\partial z}(\boldsymbol{p}),\, 1\Big)$ est perpendiculaire à l'hyperplan tangent au graphe de f en $\big(\boldsymbol{p},\, f(\boldsymbol{p})\big)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 29 : L'ensemble $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x \neq 0\}$ est fermé.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 30 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$. Alors, pour tout point $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{p}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\boldsymbol{p})\,.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 31 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, une fonction de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$. Alors pour tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y+h) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x+h, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}{h}.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 32 : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction où $D \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble borné et fermé. Si f n'admet pas de maximum global sur D, alors f n'est pas continue sur D.

☐ VRAI ☐ FAUX