Analyse II — Série 9

EPFL – Sections SIE/GC — 17.04.2025

Auto-évaluation Après avoir fini chaque série d'exercices, vous devriez pouvoir résoudre chaque exercice sans consulter vos notes de cours ou le corrigé. Plus généralement, vous devriez pouvoir...

- ☐ Identifier les conditions nécessaires à l'application du théorème des fonctions implicites.
- ☐ Utiliser le théorème des fonctions implicites pour déterminer des dérivées partielles.
- ☐ Calculer les dérivées directionnelles de fonctions à plusieurs variables:
  - en utilisant la définition formelle.
  - en exploitant les propriétés des dérivées, lorsque cela est possible.
- ☐ Faire les liens entre continuité, différentiabilité, classe C^1, existence des dérivées partielles, et *existence des dérivées directionnelles*.

Exercice 1.
Vérifier que les équations suivantes définissent implicitement une fonction $y = f(x)$ dans un voisinage de 0, et donner son développement limité d'ordre 1 en 0.

(a) $2x^3 - x^2y^4 + 2y^3 + 3x - 2 = 0$ (b) $xe^y + ye^x = -2$

Exercice 2.
Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y,z) = 2z^3 - 3yx^3 - 6yz$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie implicitement par l'équation

$$f\big(x, y, g(x,y)\big) = 11\,.$$

Sachant que $g(1,3) = -2\,$, on a

☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1,3) = 11$ ☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1,3) = \frac{12}{5}$ ☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1,3) = \frac{9}{2}$ ☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1,3) = 0$

Exercice 3.
Donner un exemple d'une fonction F de classe C^1 telle que l'ensemble de niveau

$$F^{-1}(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0\}$$

contienne le point $(0,0)$, mais qui ne soit ni le graphe d'une fonction $y = f(x)$, ni le graphe d'une fonction $x = f(y)$ au voisinage de $(0,0)$. Pouvez-vous généraliser à une fonction de n variables ?

Exercice 4.
Calculer les dérivées directionnelles des fonctions suivantes en $\boldsymbol{p}_0 = (1,1)$ suivant le vecteur $\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}$, où $\boldsymbol{v} = (1,2)$:

$$f(x,y) = (x-2y)^2 \ln(1 + x^2 + y^2) \qquad \text{et} \qquad g(x,y) = \frac{e^{2x(y+1)}}{3 + x^2y^4}$$

Exercice 5.
Soit $\boldsymbol{e} = (u, v)$ un vecteur unitaire et $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$
Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(0,0)$. Que constatez-vous ?

Exercice 6.
Soit la fonction $f(x,y,z) = xyz$ et soit le point $\boldsymbol{p}_0 = (1,-1,2)$.

(a) Trouver la dérivée directionnelle de f en $\boldsymbol{p}_0$ suivant le vecteur $\boldsymbol{e} = \frac{1}{3}(2,-1,2)$.

(b) Soit $\boldsymbol{u}$ un vecteur unitaire exprimé en coordonnées sphériques, c.-à-d.
$$\boldsymbol{u} = \big(\sin(\theta)\cos(\varphi), \sin(\theta)\sin(\varphi), \cos(\theta)\big).$$
Calculer la pente de f en $\boldsymbol{p}_0$ suivant le vecteur $\boldsymbol{u}$ en fonction de (θ, φ).

(c) Trouver les valeurs de θ et φ pour lesquelles la pente de f en $\boldsymbol{p}_0$ est maximale, respectivement minimale.

Exercice 7.
Calculer les limites suivantes (si elles existent):
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} \qquad \lim_{(x,y,z,t)\to(0,0,0,0)} \frac{xyzt}{x^2+y^2+z^2+t^2}$$

Exercice 8.
Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, et $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^2$ deux vecteurs linéairement indépendants tels que les dérivées directionnelles $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{w}}$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$. En faisant un changement de coordonnées approprié, montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque: Cela montre que si les dérivées directionnelles existent et sont continues pour deux directions différentes, alors elles le sont pour toutes les directions.

Exercice 9.
Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x,y) \mapsto f(x,y)$ une fonction. Vrai ou faux ?

(a) Si toutes les dérivées directionnelles $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}$ de f existent en $(0,0)$, alors f admet un plan tangent en $(0,0)$.

(b) Si une des dérivée directionnelle $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}$ de f n'existe pas en $(0,0)$, alors soit $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ soit $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ n'existe pas.

(c) Si une des dérivée directionnelle $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}$ de f n'est pas continue en $(0,0)$, alors soit $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ soit $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

(d) Si f est continue en $(0,0)$, il existe toujours au moins un vecteur $\boldsymbol{v}$ tel que la dérivée directionnelle unilatérale $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}+}(0,0)$ existe.

Exercice 10.
Faire l'examen blanc (disponible sur Moodle !)