# Analyse II Série 8

EPFL – Sections SIE/GC  10.04.2025

**Auto-évaluation** Après avoir fini chaque série d'exercices, vous devriez pouvoir résoudre chaque exercice sans consulter vos notes de cours ou le corrigé. Plus généralement, vous devriez pouvoir...

- ☐ Définir et calculer le gradient, la jacobienne, le jacobien et le laplacien d'une fonction.
- ☐ Appliquer les règles de composition et d'inversion des fonctions pour déterminer ces dérivées.
- ☐ Effectuer des calculs dans de nouveaux systèmes de coordonnées. En particulier, exprimer le gradient et le laplacien d'une fonction dans un autre système de coordonnées.
- ☐ Calculer des dérivées définies par des intégrales dépendant d'un paramètre.

**Exercice 1.**
On considère le changement de coordonnées inverse $H\colon D \to E$ défini par

$$(u,v) = H(x,y) \qquad \text{avec} \quad u = \frac{y}{x+2} \quad \text{et} \quad v = \frac{x}{2y+1},$$

où $D$ et $E$ sont des ouverts bien choisis, tels que $H\colon D \to E$ est bijective.

(a) Calculer la transformation inverse $G = H^{-1}\colon E \to D$.

(b) Calculer la matrice jacobienne $J_H(x,y)$ et l'évaluer en $(x,y) = G(u,v)$.

(c) Calculer la matrice jacobienne $J_G(u,v)$ et l'évaluer en $(u,v) = H(x,y)$.

(d) Calculer $\big(J_G(u,v)\big)^{-1}$ et comparer avec le résultat de (b).

(e) Calculer $\big(J_H(x,y)\big)^{-1}$ et comparer avec le résultat de (c).

**Exercice 2.**
Le **jacobien** d'un changement de coordonnées $G$ est le déterminant $\det(J_G)$ de sa matrice jacobienne. Calculer le jacobien des changements de coordonnées suivants:

(a) Coordonnées polaires.

(b) Coordonnées cylindriques.

(c) Coordonnées sphériques.

**Exercice 3.** *(Laplacien en coordonnées polaires)*
Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$, $G(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ le changement de coordonnées polaires, $H(x,y) = G^{-1}(x,y)$ le changement de coordonnées inverse, et $\overline{f} = f \circ G$.

En utilisant le fait que $f = \overline{f} \circ H$, et la dérivée de la fonction réciproque $H = G^{-1}$, retrouver la formule (vue en cours) pour le laplacien $\Delta f$ en coordonnées polaires, i.e. déterminer l'opérateur $\overline{\Delta}$ tel que

$$\overline{\Delta}\,\overline{f}(r,\varphi) = \Delta f(x,y).$$

**Exercice 4.** *(Gradient en coordonnées sphériques)*
Soit $G(r,\theta,\varphi) = \big(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta\big)$ le changement de coordonnées sphériques, et $\boldsymbol{p} = G(r,\theta,\varphi)$ un point de $\mathbb{R}^3$ (donné en coordonnées sphériques). On définit les vecteurs

$$\boldsymbol{u}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que les vecteurs $\boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_\theta, \boldsymbol{u}_\varphi$ forment une base orthonormée.
*(C'est la **base locale sphérique** associée au point $\boldsymbol{p}$.)*

(b) En déduire (sans calcul) l'inverse $J_G(r,\theta,\varphi)^{-1}$ de la jacobienne de $G$.

(c) Montrer que le *gradient en coordonnées sphériques* $\overline{\nabla}$ est donné par la formule

$$\overline{\nabla}\bar{f} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial r}\boldsymbol{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \bar{f}}{\partial \theta}\boldsymbol{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi}\boldsymbol{u}_\varphi$$

**Exercice 5.**
Soit $\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) \end{aligned}$ une fonction de classe $C^2$ et $\begin{aligned} \bar{f}\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (u,v) &\mapsto \bar{f}(u,v) \end{aligned}$ la fonction définie par

$$\bar{f}(u,v) = f\big(x(u,v), y(u,v)\big) \qquad \text{où} \qquad \begin{cases} u = 2x - y \\ v = x + 3y \end{cases}.$$

Exprimer le laplacien $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ par rapport aux variables $u$ et $v$.

**Exercice 6.**
Calculer les dérivées $F'(t)$ des fonctions $F\colon\ ]1,\infty[\ \to \mathbb{R}$ suivantes:

(a) $F(t) = \displaystyle\int_2^3 \frac{x^t + \sin(x)}{\ln(x)}\,dx.$

(b) $F(t) = \displaystyle\int_t^{t^2} \ln(x^2 + t^2)\,dx.$

**Exercice 7.**
Calculer la valeur $F'(1)$ pour les fonctions $F\colon\ ]0,\infty[\ \to \mathbb{R}$ suivantes:

(a) $F(t) = \displaystyle\int_{\sqrt{t}}^{1/t} \frac{\sin(\cos(tx))}{x}\,dx.$

(b) $F(t) = \displaystyle\int_1^{\sqrt[3]{t}} \frac{e^{tx^3}}{x}\,dx.$