Analyse II — Série 7

EPFL – Sections SIE/GC — 03.04.2025

Auto-évaluation Après avoir fini chaque série d'exercices, vous devriez pouvoir résoudre chaque exercice sans consulter vos notes de cours ou le corrigé. Plus généralement, vous devriez pouvoir…

- ☐ Trouver le plan tangent d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en un point (x_0, y_0, z_0).
- ☐ Expliquer les liens entre continuité, différentiabilité, classe C^1, et existence des dérivées partielles.
- ☐ Construire des fonctions aux propriétés spécifiques en combinant des fonctions connues (voir item précédent).
- ☐ Calculer la matrice jacobienne d'une fonction vectorielle $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ en déterminant ses dérivées partielles.
- ☐ Appliquer les règles de dérivation pour trouver les dérivées partielles d'une fonction composée.

Exercice 1.
Déterminer l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = x^3y + x^2 + y^2$ au point $(1, 1, 3)$.

Exercice 2.
Soit le point $\boldsymbol{p} = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ et la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{y}{x} + \big(1 - \cos(y)\big)\sin(x)^2 \qquad (\text{où } D = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2).$$

Le plan tangent au graphe de f en $\big(\boldsymbol{p}, f(\boldsymbol{p})\big)$ est donné par l'équation

- ☐ $z = \frac{2}{\pi}\,y + \frac{4}{\pi}\,x + 4$
- ☐ $z = -\frac{4}{\pi}\big(x - \frac{\pi}{2}\big) + \frac{2}{\pi}\,(y - \pi)$
- ☐ $z = -\frac{4}{\pi}\,x + \frac{2}{\pi}\,y$
- ☐ $z = \frac{2}{\pi}\,y - \frac{4}{\pi}\,x + 4$

Exercice 3.
Donner un exemple d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

(a) différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$ mais qui n'est pas de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

(b) avec $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -1$, mais qui n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 4.
Donner un exemple d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$

(a) de classe C^0 mais pas de classe C^1 (sur $\mathbb{R}^2$).

(b) différentiable (sur tout $\mathbb{R}^2$) mais pas de classe C^1.

(c) de classe C^4 mais pas de classe C^5.

Exercice 5.
Soit A une matrice $m \times n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la fonction définie par $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$. Montrer que $f'(\boldsymbol{x}) = A$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 6.
Soit la fonction $f = g \circ h$, où $\begin{array}{rl} g\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\mapsto g(x,y,z) \end{array}$ est une fonction de classe C^1 quelconque, et $\begin{array}{rl} h\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\mapsto h(u,v) = \big(ve^{-2u},\ u^2e^{-v},\ u\big). \end{array}$ Alors $\dfrac{\partial f}{\partial u}(1,0) =$

- ☐ $2\,\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,1,1) + \dfrac{\partial g}{\partial z}(0,1,1)$
- ☐ $2\,\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,1,1) + \dfrac{\partial g}{\partial z}(0,1,1)$
- ☐ $2\,\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,0,1) + \dfrac{\partial g}{\partial z}(1,0,1)$
- ☐ $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,1,1) + 2\,\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,1,1)$

Exercice 7.
Calculer les matrices jacobiennes des fonctions suivantes:

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\quad (x,y) \mapsto f(x,y) = (-y, x, x+y)$.

(b) $f = g \circ h$, où $\begin{array}{rl} h\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) &\mapsto (-y, x, xy) \end{array}$ et $\begin{array}{rl} g\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\mapsto (x^2+y^2-2z, x^2+y^2+2z). \end{array}$

(c) $f = g \circ h$, où $\begin{array}{rl} h\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\mapsto (e^{y+2z}, x^2+yz) \end{array}$ et $\begin{array}{rl} g\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto (\cos x, \sin y). \end{array}$

Exercice 8. *Projection Stéréographique*
Notons par $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ la sphère unité dans $\mathbb{R}^3$.

(a) Soit la fonction $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$v(x,y) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\right).$$

Montrer que $v(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathbb{S}^2$ et calculer la matrice jacobienne de v.

(b) Soit la fonction $\begin{array}{rl} w\colon U &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\mapsto \left(\dfrac{x}{1+z}, \dfrac{y}{1+z}\right) \end{array}$ où $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \neq -1\}$.

Calculer la matrice jacobienne de w.

(c) Montrer que $w \circ v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est l'application identité, et calculer la matrice jacobienne de $w \circ v$ de deux manières différentes.

(d) (**Difficile**) Interpréter v et w géométriquement.

L'application $w\colon \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,-1)\} \to \mathbb{R}^2$ s'appelle *la projection stéréographique* et donne une bijection entre la sphère unité privée d'un point (son pôle sud) et le plan.