Analyse II — Série 6

EPFL – Sections SIE/GC — 27.03.2025

Auto-évaluation Après avoir fini chaque série d'exercices, vous devriez pouvoir résoudre chaque exercice sans consulter vos notes de cours ou le corrigé. Plus généralement, vous devriez pouvoir...

- ☐ Déterminer le domaine de définition d'une fonction à plusieurs variables.
- ☐ Calculer les dérivées partielles d'une fonction $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$...
  - en appliquant la définition formelle à l'aide des limites ;
  - en utilisant les règles de calcul des dérivées.
- ☐ Analyser la continuité et la différentiabilité d'une fonction à plusieurs variables, en identifiant les points potentiellement problématiques.
- ☐ Calculer la dérivée totale et la matrice hessienne d'une fonction à plusieurs variables.
- ☐ Structurer une réponse claire et cohérente pour des exercices composés de plusieurs parties, en utilisant une notation mathématique appropriée.

Exercice 1.
Déterminer les fonctions dérivées partielles de chacune des fonctions ci-dessous:

(a) $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{xy}$.

(b) $f(x,y) = \ln(xy\sin(x))$.

(c) $f(x,y,z) = \arctan(xyz)$.

(d) $f(x,y,z) = (x^y)^z$.

Exercice 2.
Trouver le domaine et déterminer les fonctions dérivées partielles du premier **et du second ordre** de chacune des fonctions ci-dessous:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$

(b) $f(x,y,z) = x^{(y^z)}$

(c) $f(x,y) = \sin(x^2y)\cosh(y-x)$

(d) $f(x,y,z) = \sinh\left(\dfrac{x+3yz}{z-2}\right)^2$

Exercice 3.
Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ de la fonction suivante. Que constatez-vous ?

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Exercice 4.
La matrice Hessienne en (x,y) de la fonction $f(x,y) = x + x^2\,e^{\sin(y)}$ est :

☐ $e^{\sin(y)}\begin{pmatrix} 2 & 2x\cos(y) \\ 2x\cos(y) & x^2\left(\cos(y)^2 - \sin(y)\right) \end{pmatrix}$

☐ $e^{\sin(y)}\begin{pmatrix} 2 & 2x\cos(y) \\ 2x\cos(y) & x^2\cos(y)^2 \end{pmatrix}$

☐ $e^{\sin(y)}\begin{pmatrix} x^2\left(\cos(y)^2 - \sin(y)\right) & 2x\cos(y) \\ 2x\cos(y) & 2 \end{pmatrix}$

☐ $e^{\sin(y)}\begin{pmatrix} 2 & 2x\cos(y) \\ 2x\cos(y) & -x^2\sin(y) \end{pmatrix}$

Exercice 5.
Soient $g, h\colon D \to \mathbb{R}$, de classe C^1, avec $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ouvert. Calculer les dérivées totales f' des fonctions suivantes:
(a) $f(x,y) = g(x,y) + h(x,y)$ (b) $f(x,y) = g(x,y)\,h(x,y)$ (c) $f(x,y) = \dfrac{g(x,y)}{h(x,y)}$

Exercice 6.
Pour les fonctions $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ci-dessous, déterminer le plus grand ensemble $D \subseteq \mathbb{R}^2$ où:
(i) f est continue
(ii) les dérivées partielles existent
(iii) f est différentiable
(iv) f est de classe C^1

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2+1} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} xy\log(x^2+y^2) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \arctan\left(\dfrac{x}{y^2}\right) & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$

(d) $f(x,y) = x\,|xy - \sin(x)|$

Exercice 7.
Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$, avec $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ouvert, et $(x_0,y_0) \in D$. Vrai ou faux ?

(a) Si f est différentiable en (x_0,y_0), alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ existent.

(b) Si f est de classe C^2, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.

(c) Si f est différentiable en (x_0,y_0), alors
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0\,.$$

(d) Si f est différentiable en (x_0,y_0), alors
$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h_1,y_0+h_2) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0\,.$$

(e) Si f est de classe C^2, alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h^2,y_0) - f(x_0,y_0)}{h^2}$.