Analyse II — Série 5

EPFL – Sections SIE/GC — 20.03.2025

Auto-évaluation Après avoir fini chaque série d'exercices, vous devriez pouvoir résoudre chaque exercice sans consulter vos notes de cours ou le corrigé. Plus généralement, vous devriez pouvoir…

- ☐ Esquisser une courbe paramétrique simple.
- ☐ Calculer la longueur d'un chemin.
- ☐ Calculer la limite d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en un point, quand elle existe.
- ☐ Construire des suites $\{(x_k, y_k)\}_{k\geq 1}$ pour démontrer que la limite d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en un point n'existe pas.
- ☐ Utiliser les limites de fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pour étudier la continuité de f.
- ☐ Relier les lignes de niveau d'une fonction à son graphe, graphiquement et analytiquement.

Exercice 1.

Soit la fonction $f\colon [0, 2\pi + 4] \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} (1+\cos(t), \sin(t)) & \text{si } t \in [0, \pi[\,, \\ (-1-\cos(t), \sin(t)) & \text{si } t \in [\pi, 2\pi[\,, \\ (-2-2\pi+t, 0) & \text{si } t \in [2\pi, 2\pi+4]\,. \end{cases}$$

(a) Vérifier que f définit un chemin, i.e. montrer que f est une fonction continue.

(b) Esquisser l'ensemble image de f.

(c) Est-ce que la fonction f est injective ?

(d) Calculer la longueur du chemin f.

Exercice 2.

Déterminer (s'il existe) le prolongement par continuité au point $(0,0)$ des fonctions $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ suivantes:

(a) $f(x,y) = \dfrac{3x^3 - 2y^3}{x^2+y^2}$

(b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + (2x-y)^2}$

(c) $f(x,y) = \dfrac{1-\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2}$

(d) $f(x,y) = xy\,\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

Exercice 3.

Calculer les limites suivantes si elles existent:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x^2-3y}{x+2y^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan(3x^2+y^2)}{3x^2+y^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^4}$

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+\log(1+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-e^{x^3}}{x^2+y^2}$

(g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|y|}{x^2+|y|+y^2}$

(h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2-xy^3-y^7}{x^4+2x^2y^2+y^4}$

Exercice 4.

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R};\ \ f(x,y) = \dfrac{y\,\ln\Big(1+(x^2+y^2)^2\Big)}{\exp\Big(\sqrt{x^2+y^2}\Big)\,\big(x^2+y^2\big)^{\frac{5}{2}}}$. Alors,

- ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$
- ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas
- ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$
- ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{1}{4}$

Exercice 5.

(a) Soit la fonction $f(x,y) = x^2 - 2y$. Dessiner les lignes de niveau $f(x,y) = c$ pour $c = -2, 0, 2$ et représenter les gradients aux points $P = (-2,3)$, $Q = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ et $R = (2,1)$.

(b) Construire une fonction $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que le graphe de f soit une surface de niveau de g. Exprimer toutes les surfaces de niveau de g comme le graphe d'une fonction $\hat{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Exercice 6.

Étudier la continuité de la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivante en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Exercice 7.

Donner un exemple d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui n'admet pas de limite en $(0,0)$ mais vérifie pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t\to 0} f(t,\, \alpha\, t^2) = 0\,.$$

Exercice 8.

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Parmis toutes les implications possibles ((a) $\Rightarrow$ (b), (b) $\Rightarrow$ (a), (a) $\Rightarrow$ (c), ...), déterminer celles qui sont vraies, et donner un contre-exemple pour celles qui sont fausses.

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe.

(b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0)$ existe.

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,0)$ existe.

(d) $\lim\limits_{r\downarrow 0} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ existe $\forall\, \varphi \in \mathbb{R}$.

(e) $\lim\limits_{r\downarrow 0} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ existe $\forall\, \varphi \in \mathbb{R}$, et la valeur de la limite ne dépend pas de φ.

(f) f est continue en $(0,0)$.